

分类号 _____

密 级 _____

U D C _____

编 号 10486

武汉大学
硕士专业学位论文

基于足绑惯性传感器的行人导航
技术研究

研 究 生 姓 名 : 李雨

学 号 : 2016206180012

指导教师姓名、职称 : 牛小骥 教授

专业类别(领域) : 大地测量学与测量工程

二〇一九年四月

Research on Technique Foot-Mounted IMU based Pedestrian Navigation

By

Li Yu

Supervised by

Professor Niu Xiaoji

April, 2019

Wuhan University

Wuhan, Hubei 430079, P.R.China

论文原创性声明

本人郑重声明：所呈交的学位论文，是本人在导师指导下，独立进行研究工作所取得的研究成果。除文中已经标明引用的内容外，本论文不包含任何其他个人或集体已经发表或撰写过的研究成果。对本文的研究做出贡献的个人和集体，均已在文中以明确方式标明。本声明的法律结果由本人承担。

学位论文作者（签名）：

2019 年 04 月 15 日

摘要

基于脚绑惯性传感器的行人导航技术在过去十年中一直是室内外行人导航领域的研究热点，一方面是由于单兵，消防等专业应用领域对室内外无缝的精确，稳定的导航系统的迫切需求，另一方面近年来混合现实和增强现实技术的快速发展也对连续实时的行人位置服务提出了相应的要求。

本文首先回顾了前人的相关研究，阐述了脚绑行人惯性导航系统的发展现状。接着对零速修正辅助的捷联惯性导航算法原理进行了介绍。针对脚绑系统仿真领域的研究空白，设计了一种基于实测数据的理想脚绑惯性传感器数据模拟方法，首先利用组合导航双向平滑结果作为导航状态序列参考真值，接着利用惯导反演算法得到传感器数据，然后从脚部静态和动态特性两个方面对脚绑系统进行了仿真分析，量化了传感器误差和零速量测误差对系统精度的影响。基于以上思路开发的行人导航系统仿真软件可以用于指导行人导航系统的传感器芯片选型，算法的验证及改进。随后在现有的导航算法基础上，提出一种基于等式约束的双足双系统融合方法，在不依赖外部测距设备的情况下，从脚部运动模式中发掘了一种实用的等式距离约束，典型场景下的实验结果证明提出的双系统等式约束方法能够有效提高系统的定位精度。

关键词：惯性传感器；零速修正；行人导航

Abstract

Foot-Mounted IMU (Inertial Measurement Unit) based pedestrian navigation technique has been widely studied in last decade, which is partly due to the imperative requirement of an accurate and reliable pedestrian tracking system in many fields (e.g., soldier and first responder positioning). On the other hand, the emerging position aware calculation such as mixed reality and augmented reality also necessitate continuous and real-time positioning service.

The thesis outline is as follows: firstly a progress review about Foot-Mounted inertial navigation is made. Then it follows the introduction to the principle of the zero-velocity aided inertial navigation. Aiming at the research blank of foot-mounted IMU data simulation, a real measured data based foot-mounted IMU data generator is developed for the use of algorithm evaluation and chip selection in system design. The Foot-Mounted system is analyzed from the aspects of both the static characteristic and the dynamic characteristic based on the generated simulation data, so that the error induced by the sensor error and the zero velocity measurement error can be quantified. After that a novel equality constraint method that fuses the information of two foot-mounted systems is also proposed, which is proved to perform significantly better than the existing basic single-foot algorithm as well as the upper bound based inequality constraint algorithm.

Key words: Inertial sensors; Zero-velocity update (ZUPT); Pedestrian navigation

目录

摘要.....	I
Abstract.....	II
1. 绪论.....	1
1.1 研究背景.....	1
1.2 国内外研究现状.....	2
1.3 论文内容和结构.....	4
2. 行人惯性导航基础理论.....	5
2.1 常用坐标系统.....	5
2.1.1 惯性坐标系（i 系）	5
2.1.2 载体坐标系（b 系）	6
2.1.3 地心地固坐标系（e 系）	6
2.1.4 导航坐标系（n 系）	6
2.2 常用姿态表示方法.....	7
2.2.1 四元数.....	7
2.2.2 欧拉角.....	8
2.2.3 方向余弦矩阵.....	8
2.2.4 等效旋转矢量.....	8
2.2.5 姿态表示方法间的转换.....	9
2.3 传感器误差模型.....	11
2.3.1 常见随机过程.....	12
2.3.2 惯性传感器随机误差仿真.....	13
2.3.3 惯性传感器标定.....	14
2.4 捷联惯导机械编排.....	14
2.4.1 速度更新.....	15
2.4.2 位置更新.....	16
2.4.3 姿态更新.....	16
2.5 零速修正算法.....	18
2.5.1 系统模型.....	18
2.5.2 量测模型.....	21
2.5.3 零速修正.....	21
2.5.4 脚绑系统可观性分析.....	23
2.6 小结.....	24

3. 脚绑惯性行人导航系统仿真.....	25
3.1 惯性传感器数据仿真.....	25
3.1.1 惯导反演算法.....	26
3.1.2 抗发散的反演算法.....	27
3.1.3 轨迹真值的产生.....	29
3.2 惯性传感器数据仿真实例.....	32
3.2.1 传感器实验平台.....	32
3.2.2 GNSS 辅助的数据仿真实例	33
3.2.3 光学系统辅助的数据仿真实例.....	37
3.3 脚绑行人导航系统仿真.....	40
3.4 小结.....	42
4. 基于等式约束的双系统融合方法.....	43
4.1 双脚等式约束方法.....	43
4.1.1 系统模型.....	43
4.1.1 启发式等式约束.....	44
4.2 实时系统中的时滞量测处理.....	46
4.3 算法性能测试与验证.....	49
4.4 小结.....	52
5. 结论和展望.....	53
5.1 本文工作总结.....	53
5.1 后续工作展望.....	54
参考文献	55
攻读硕士学位期间发表的论文和取得的科研成果.....	58
致谢	59

1. 绪论

1.1 研究背景

随着科技的快速发展和城市化的推进，导航定位服务对于人们的日常生活越发地不可或缺。人们的生产、休闲和社会活动都不再局限于熟悉的、固定的场所，人们的空间位置随时间的变化越发复杂。尤其在武警执勤、消防救援、电气线路、管道维护等专业应用领域中，指挥系统需要对工作人员位置的变化做出及时的反应，然后进行相应指挥和调度。因此这些领域均对一个稳定精确的室内外无缝行人导航与定位系统提出了迫切的需求。

目前，导航定位技术根据其定位原理不同可大致分为三种：空间交会测量、数据库匹配以及航位推算（Dead-Reckoning, DR）。卫星导航定位系统（Global Navigation Satellite System, GNSS）是典型的基于空间距离后方交会的导航定位系统，采用时间测距的被动导航体制，能够为地球表面和近地空间的广大用户提供全天候、全天时、高精度的位置、速度和时间等导航信息服务（帅平等，2007）。目前卫星导航定位正在向着多频多系统的方向发展，另外在星基、地基增强系统的辅助下，将有望达到厘米级的实时定位精度。但与此同时一些从根本上难以解决的问题，例如信号遮挡，多路径效应等让卫星导航定位系统无法有效满足城市复杂环境下导航定位和室内定位的需求。在室内环境中，基于指纹库的 WiFi 匹配定位和磁场匹配定位近年来被广泛研究，在一定环境下能够提供三到五米的室内定位精度（Husen M N, 2014; Subbu K S P, 2011），但也存在复杂环境下定位精度下降，大范围内数据库维护更新困难等问题，并且显然无法应用于未知环境中。一般来说，空间交汇测量以及数据库匹配均属于绝对定位，其优点在于定位误差不会随时间累积，但需要良好的观测条件以及先验信息的支撑，在较为复杂的未知环境中定位结果较差甚至无法工作。航位推算则属于相对定位，当前系统导航状态由前一时刻的系统状态及运动传感器量测信息共同决定。基于微机电系统（Micro-Electro-Mechanical System, MEMS）的运动传感器具有抗震，抗冲击，耐高温等优点，因此系统受环境变化的影响小，适用于未知的复杂环境。缺点是基于航位推算的导航定位系统定位误差随时间累积，一般难以独立完成较长时间的导航定位任务。

由此可见，一个稳定、精确的覆盖室内外的行人导航系统必然是多个互补系统的组合。而对于单兵、消防等专业应用来说，在室外信号条件良好的情况下 GNSS 已经能够提供足够精确的位置信息，目前的主要技术挑战则是设计一个在卫星信号失锁，先验数据库信息不可用的条件下仍然能在一定时间内提供精确位置的行人导航系统，与 GNSS 等绝对定位系统进行组合，进而得到一个室内外无

缝的行人导航系统。因此本文针对基于足绑惯性传感器的行人惯导技术的研究，具有重要的实际意义和实用价值。

1.2 国内外研究现状

近年来，基于惯性传感器的行人定位方法由于其极强的环境适应性和抗干扰性而得到了广泛的研究，目前相关研究多基于低成本惯性传感器。就技术路线而言主要分为两种，不同技术的应用主要取决于传感器安装位置以及是否与人体固连。一种是基于如智能手机，手环等手持设备内置的惯性传感器的行人航位推算（Pedestrian Dead Reckoning, PDR），主要面向消费类的大众应用。由于传感器精度较差，如果将传感器信息输入纯惯导系统，输出位置误差在十秒内就可达上百米。因此往往利用人体步态模型结合加速度计输出估计步长，加上陀螺及磁强计给出的航向信息进行航位推算（Hemin Zhang et al, 2014）。一般来说，这种基于经验模型的 PDR 方法精度较差，且无法适应上下楼梯，横移，后退等复杂运动模式（Wang B et al, 2018）。另一种典型方案是将惯性传感器固连在脚上，沿用惯导系统的积分思路，同时将脚部周期性的静态或准静态作为辅助信息，抑制系统误差发散，其本质上是一个零速修正辅助的惯性导航系统(ZUPT Aided INS)。Foxlin E (2005) 系统阐述了这种基于脚绑惯性传感器的行人导航算法，在简单的闭合轨迹测试中位置精度达到了行走里程的千分之三。这种方法理论上能够应用于各种行人的运动模式，能在一定时间内保持较高的精度，因此十分适合作为消防员，武警和单兵任务中的导航定位系统。

国内外学者的相关研究一方面针对零速检测，如何利用行人运动信息准确地检测出静态或零速信息是脚绑行人惯导系统的核心问题。目前主流的方法是基于惯性传感器的陀螺或加速度计输出进行零速检测（Feliz Alonso R et al, 2016; Godha S, Lachapelle G, 2008; Ojeda L, Borenstein J, 2007）。Skog I et al. (2010) 利用广义似然比检验推导出了一种理论上最优的加速度、角速率联合检测方法，被同行广泛使用。另外，近年来也有很多学者讨论了隐马尔可模型（Callmer J et al, 2010; Park S K, Suh Y S, 2010; Ren M et al, 2016），递归神经网络（Wagstaff B, Kelly J, 2018）等机器学习方法在零速检测中的应用。

另外，对于脚绑式系统来说，位置和航向均为不可观的系统状态，在较长时间的导航定位任务中，系统精度将由航向误差主导，因此另一方面相关研究针对如何减小航向误差发散。一些其他信息源例如 GNSS (Rantakokko J et al, 2016; LE Scornec J et al, 2017)，UWB (Xu Y et al, 2016) 能够直接提供位置信息来避免惯导系统的误差发散，但存在信号遮挡问题；相机 (Pierce D, 2016; Rantakokko

J et al, 2012), 激光雷达 (Pham D D, Suh Y S, 2016) 能有效提高系统的鲁棒性, 同时帮助完成例如环境感知, 地图构建等任务, 缺点是易受光照, 纹理等环境因素的影响; 除零速信息外, 一些学者致力于发掘更多的自包含信息, 提出了启发式航向约束 (Heuristic Drift Reduction, HDR) (Borenstein J, Ojeda L, 2010), 航向锁定 (Zero Integrated Heading Rate, ZIHR) (Abdulrahim K et al, 2012) 等方法抑制航向误差发散, 但自包含信息的引入往往会带来粗差, 因此相应地需要采用一些抗差的方法来保证系统的鲁棒性; 一般认为两个足绑系统的融合有助于减小对称性系统误差从而能够提高系统精度。两脚之间一般认为存在一个空间距离上限, 因此可以构造一个不等式约束来融合两个足绑系统 (Prateek G V et al, 2013; Shi W et al, 2017; Skog I, NILSSON J O, 2012)。相较于不等式约束, 如果利用声呐或者无线电信号测量两脚之间的绝对距离 (Laverne M et al, 2011) 或距离变化率 (Brand T J, Phillips R E, 2003), 则可以构造一个更加精确稳定的等式约束。

目前来说, 高精度的激光陀螺 (Ring Laser Gyro, RLG) 和光纤陀螺 (Fiber Optic Gyro, FOG) 系统体积和重量相对较大, 不适合作为穿戴式设备, 且成本很高, 难以大规模装备军队和消防武警队伍。但随着传感器技术的发展, 已经出现了战术级甚至更高精度的 MEMS 惯性传感器, 这将使得脚绑式惯导系统能够面向高精度的应用。因此, 考虑到随后的高精度应用, 我们需要相应的脚绑惯性传感器仿真数据来进行战术级甚至导航级的系统仿真。仿真系统可以指导芯片选型, 是进行算法验证和改进的有效工具, 能够极大地推动导航系统的研发。目前脚绑式惯导系统仿真这方面的文献较少, 主要原因在于脚部动态大且复杂, 有别于车载惯性传感器数据仿真, 难以用简单的数学模型产生逼真的理想惯性传感器数据。德国宇航中心的研究人员最早提出了一个数据集, 包括各种场景下的低成本脚绑惯性传感器数据和相应的由动作捕捉系统提供的参考真值 (Angermann M et al, 2010), 但由于所用传感器精度较差, 无法进行高精度的系统仿真; 随后有学者在上述数据集基础上, 假定航向角和横滚角在行走过程中不变, 利用一个由正余弦函数构成的数学模型拟合得到连续的导航状态, 进而通过求解姿态微分方程和比力方程得到理想的惯性传感器输出 (Francisco J. Zampella A R J, 2006); Wang Y et al. (2018) 基于类似的思路利用运动康复领域常用的人体步态模型产生了脚绑惯性传感器输出。然而这种基于运动模型产生的惯性传感器数据往往不够逼真, 忽略了大量脚部运动的细节, 使得仿真结果与实测结果相去甚远。

1.3 论文内容和结构

本文主要对脚绑惯性导航系统 (Foot-Mounted Inertial Navigation System, FM-INS) 进行研究，针对国内外在数据仿真领域的研究空白，提出了一种脚绑式惯性传感器数据仿真方法，开发了一个利用低精度实测数据产生高精度理想 IMU 数据的仿真数据模拟器。基于蒙特卡洛方法对理想传感器数据进行数据污染并进行仿真实验，给出了各等级典型惯性传感器对应的导航性能。随后在单脚系统的基础上，提出了一种无需其他测距设备的双系统等式约束方法，有效提高了系统的精度。

论文章节安排如下：

第一章，绪论。首先对行人导航的研究背景进行了简单介绍，通过比较目前现有的行人导航方法，引出了基于惯性传感器的行人导航技术的优势以及开展相关研究的必要性。随后概述了国内外对行人惯性导航的研究现状，并在此基础上给出了本文的创新点和研究重点。

第二章，行人惯性导航基础理论。首先给出了文中用到的几种坐标系定义，然后介绍了几种需要用到的姿态表示方法和捷联惯导更新算法，最后概述了基于卡尔曼滤波器的零速修正方法并对脚绑系统进行了可观测性分析。

第三章，脚绑惯性行人导航系统仿真。给出了理想脚绑 IMU 数据的产生原理和数据处理流程，仿真了各等级典型惯性传感器数据并进行了解算，对比分析了各等级脚绑系统在典型场景下的性能。

第四章，基于等式约束的双系统融合方法。提出了一种基于等式约束的双系统数据融合算法。首先给出了双系统数据融合的系统模型，然后从行人步态中发掘出一种启发式的等式距离约束并依此构建量测模型，最后说明了带有时间延迟量测产生的原因并给出了在实时系统中相应的处理方法。

第五章，总结与展望。总结本课题主要工作，并对后续工作提出设想与规划。

2. 行人惯性导航基础理论

惯性导航系统主要有两种类型：捷联式和平台式。惯性导航技术的原始应用一般将惯性传感器安装在一个稳定平台上，通过使惯性元件经过万向支架角运动阻隔从而直接模拟导航坐标系，计算简单且体系精度高，但结构杂乱，体积庞大且制造成本高（张天光等，2006）；而在捷联式惯导系统中，一般将传感器固连在运动载体壳体上，姿态信息的获得由计算机完成，省去了复杂的机械平台，降低了成本，相比平台式惯导更具优势。本章内容将围绕捷联惯导算法展开，第一部分主要介绍了惯导系统中几种常用坐标系，第二部分概述了需要用到的几种姿态表示方法，第三部分给出了捷联惯导速度，位置和姿态的更新算法，最后一部分介绍了基于卡尔曼滤波的零速修正算法。

2.1 常用坐标系统

惯性导航系统中涉及了很多坐标参考系统，在捷联惯导算法中一个矢量经常需要从一个坐标系转换到另一个坐标系，例如比力和角速率矢量经加速度计和陀螺测量从而被分解到载体坐标系中，但是为了获得导航状态，测量值需要转换到导航坐标系中去。这一节介绍各种参考系的定义及其相关属性。

2.1.1 惯性坐标系（ i 系）

固连在理想的惯性坐标系中的加速度计和陀螺输出为零，然而严格的惯性系很难找到，在实际应用中我们使用的是一个准惯性系，即是一个不随地球自转旋转的地球坐标系：即以地心为原点， x^i 轴指向平春分点方向， z^i 轴方向为地球自转轴，与 y^i 轴指向构成右手系，如图 2.1 所示。平春分点是黄道和天球赤道的升交点，因此依此定义的坐标系非常接近一个理想的惯性坐标系。

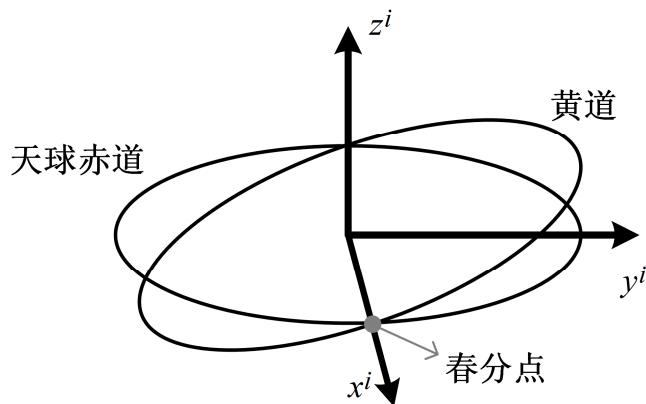


图 2.1 惯性系

2.1.2 载体坐标系（b 系）

捷联在载体上的加速计和陀螺测量得到的比力和角速率矢量会分解到载体坐标系中（Shin E H, 2001）。在本文中，载体坐标系和传感器坐标系不作区分。

2.1.3 地心地固坐标系（e 系）

地球坐标系以地球质心为原点，坐标轴与地球固连，即随地球一起相对惯性空间转动。如图 2.2 所示， x^e 轴指向本初子午线与地球赤道的交点， z^e 轴沿地球自转轴方向，与 y^e 轴一起构成右手系。

2.1.4 导航坐标系（n 系）

在惯性导航中，导航坐标系一般选择当地地理坐标系。如图 2.2 所示，导航坐标系原点和惯性传感器框架原点一致， x^n 轴指向当地北方向， z^n 轴沿椭球法线向下，与 y^n 轴一同构成右手系，即北-东-地（NED）坐标系， λ, φ 分别为大地经度和大地纬度。

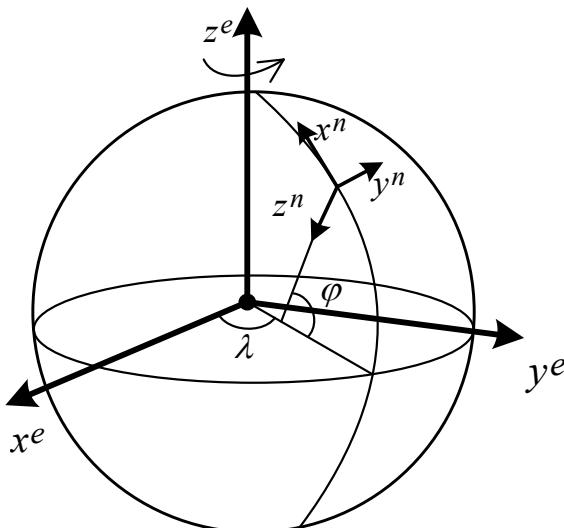


图 2.2 地心地固坐标系与导航坐标系

导航坐标系轴向会随着载体运动而变化，导航坐标系的转移速率 ω_{en}^n 定义为：

$$\omega_{en}^n = \begin{bmatrix} v_E & -v_N & -v_E \tan \varphi \\ R_N + h & R_M + h & R_N + h \end{bmatrix}^T \quad (2-1)$$

其中：

$$\begin{cases} R_M = \frac{R_e(1-e^2)}{(1-e^2 \sin^2 \varphi)^{3/2}} \\ R_N = \frac{R_e}{(1-e^2 \sin^2 \varphi)^{1/2}} \end{cases} \quad (2-2)$$

ω_{en}^n 中上标 n 表示投影目标坐标系为 n 系, 下标代表运动坐标系为 n 系, 参考坐标系为 e 系。 v_N, v_E 分别表示北向, 东向速度, h 表示高程; R_M, R_N 分别表示子午圈主曲率半径和卯酉圈主曲率半径; R_e 表示地球椭球半长轴, e 是第一偏心率, 对于 WGS84 椭球, 分别有:

$$\begin{cases} R_e = 6378137.0 \text{m} \\ e = 0.006694379988635 \end{cases}$$

类似地, n 系下的地球自转速率可定义为:

$$\omega_{ie}^n = [\omega_e \cos \varphi \quad 0 \quad -\omega_e \sin \varphi]^T \quad (2-3)$$

其中 ω_e 为一个标量, 表示地球自转角速率, 约 15 度每小时。

2.2 常用姿态表示方法

实现导航的任务需要将载体坐标系中的加速度和角速率矢量分解到导航坐标系中, 惯导中的姿态即表示 b 系与 n 系之间的转换关系。常见的姿态表示方法有: 方向余弦矩阵、四元数、欧拉角以及等效旋转矢量, 几种不同的表示方式理论上等价且可以相互转换, 具体转换关系在 2.2.5 小节中给出。

2.2.1 四元数

用于姿态表示的四元数 \mathbf{q}_b^n 是一个四维的矢量, 由标量部分 s 和一个三维矢量 \mathbf{v} 组成, 且理论上应满足归一化条件:

$$\mathbf{q}_b^n = \begin{bmatrix} s \\ \mathbf{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix}, \quad q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 = 1 \quad (2-4)$$

四元数的逆运算定义为:

$$(\mathbf{q}_b^n)^{-1} = \begin{bmatrix} s \\ -\mathbf{v} \end{bmatrix} \quad (2-5)$$

对于两四元数

$$\mathbf{q}_b^c = \begin{bmatrix} s_1 \\ \mathbf{v}_1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q}_c^n = \begin{bmatrix} s_2 \\ \mathbf{v}_2 \end{bmatrix} \quad (2-6)$$

其乘积定义为

$$\mathbf{q}_b^n = \mathbf{q}_b^c \otimes \mathbf{q}_c^n = \begin{bmatrix} s_1 s_2 - \mathbf{v}_1^T \mathbf{v}_2 \\ s_1 \mathbf{v}_2 + s_2 \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 \end{bmatrix} \quad (2-7)$$

2.2.2 欧拉角

三维空间中的刚体定点转动具有三个自由度，需要三个广义坐标才能完整描述。欧拉角是三个一组的角参数广义坐标，最早由欧拉（Euler）提出而得名。姿态的欧拉角表示法参数最少，物理含义直观，比较容易理解（严恭敏等，2016）。在捷联惯导中，描述运载体的一组欧拉角通常称为姿态角，包括航向角 ψ ，俯仰角 θ 以及横滚角 ϕ 。

2.2.3 方向余弦矩阵

对于 n 系和 b 系中的两组单位正交基，其变换公式为：

$$\begin{bmatrix} i^b & j^b & k^b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i^n & j^n & k^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i^n i^b & i^n j^b & i^n k^b \\ j^n i^b & j^n j^b & j^n k^b \\ k^n i^b & k^n j^b & k^n k^b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i^n & j^n & k^n \end{bmatrix} \mathbf{P} \quad (2-8)$$

其中 \mathbf{P} 称为 n 系到 b 系过渡矩阵，容易证明 \mathbf{P} 为单位正交矩阵，令

$$\mathbf{C}_b^n = \mathbf{P}^{-1} \quad (2-9)$$

\mathbf{C}_b^n 为 b 系到 n 系的坐标变换矩阵或姿态矩阵。

2.2.4 等效旋转矢量

如图 2.3 所示，姿态也可以用一次定轴转动来描述，由三维空间中的一个矢量 ϕ 表示。矢量方向为转动轴，矢量的模为转动角度。

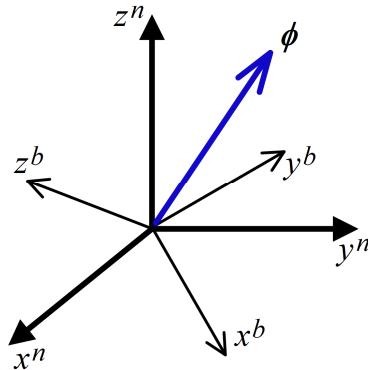


图 2.3 旋转矢量

J.E, Bortz 推导了等效旋转矢量的微分方程（Bortz J E, 1971），也称作 Bortz 方程，为现代高精度捷联惯导姿态算法奠定了理论基础。

$$\begin{aligned}\dot{\phi}_{ib} &= \omega_{ib} + \frac{1}{2} \phi_{ib} \times \omega_{ib} + \frac{1}{\|\phi_{ib}\|^2} \left(1 - \frac{\|\phi_{ib}\| \sin \|\phi_{ib}\|}{2(1 - \cos \|\phi_{ib}\|)} \right) \phi_{ib} \times (\phi_{ib} \times \omega_{ib}) \\ &\approx \omega_{ib} + \frac{1}{2} \phi_{ib} \times \omega_{ib} + \frac{1}{12} \phi_{ib} \times (\phi_{ib} \times \omega_{ib})\end{aligned}\quad (2-10)$$

其中 ω_{ib} 表示 b 系相对于 i 系的转动角速率， $\|\cdot\|$ 表示欧几里得范数。

2.2.5 姿态表示方法间的转换

1) 四元数

姿态四元数 \mathbf{q} 可以由一个等效旋转矢量表示：

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} \cos \|\mathbf{0.5}\phi\| \\ \sin \|\mathbf{0.5}\phi\| \\ \|\mathbf{0.5}\phi\| \end{bmatrix} \quad (2-11)$$

$\mathbf{q} = [q_0 \ q_1 \ q_2 \ q_3]^T$ 也可以由一组欧拉角表示：

$$\begin{cases} q_0 = \cos \frac{\phi}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{\psi}{2} + \sin \frac{\phi}{2} \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{\psi}{2} \\ q_1 = \sin \frac{\phi}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{\psi}{2} - \cos \frac{\phi}{2} \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{\psi}{2} \\ q_2 = \cos \frac{\phi}{2} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\psi}{2} + \sin \frac{\phi}{2} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\psi}{2} \\ q_3 = \cos \frac{\phi}{2} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\psi}{2} - \sin \frac{\phi}{2} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\psi}{2} \end{cases} \quad (2-12)$$

这里同样给出一种鲁棒性较好的从方向余弦矩阵 \mathbf{C} 中提取相应四元数的方法，首先定义：

$$P_1 = 1 + \text{tr}(\mathbf{C}), \ P_2 = 1 + 2c_{11} - \text{tr}(\mathbf{C}), \ P_3 = 1 + 2c_{22} - \text{tr}(\mathbf{C}), \ P_4 = 1 + 2c_{33} - \text{tr}(\mathbf{C})$$

其中 $\text{tr}(\cdot)$ 表示矩阵的迹， c_{ij} 表示方向余弦矩阵第 i 行第 j 列的元素。在此基础上对应的四元数可以表示为：

若 $P_1 = \max \{P_1, P_2, P_3, P_4\}$ ，则：

$$q_0 = 0.5\sqrt{P_1}, \ q_1 = \frac{c_{32} - c_{23}}{4q_0}, \ q_2 = \frac{c_{13} - c_{31}}{4q_0}, \ q_3 = \frac{c_{21} - c_{12}}{4q_0}$$

若 $P_2 = \max \{P_1, P_2, P_3, P_4\}$ ，则：

$$q_1 = 0.5\sqrt{P_2}, \ q_2 = \frac{c_{21} + c_{12}}{4q_1}, \ q_3 = \frac{c_{13} + c_{31}}{4q_1}, \ q_0 = \frac{c_{32} - c_{23}}{4q_1}$$

若 $P_3 = \max \{P_1, P_2, P_3, P_4\}$ ，则：

$$q_2 = 0.5\sqrt{P_3}, \quad q_3 = \frac{c_{32} + c_{23}}{4q_2}, \quad q_0 = \frac{c_{13} - c_{31}}{4q_2}, \quad q_1 = \frac{c_{21} + c_{12}}{4q_2}$$

若 $P_3 = \max \{P_1, P_2, P_3, P_4\}$, 则:

$$q_3 = 0.5\sqrt{P_4}, \quad q_0 = \frac{c_{21} - c_{12}}{4q_3}, \quad q_1 = \frac{c_{13} + c_{31}}{4q_3}, \quad q_2 = \frac{c_{32} + c_{23}}{4q_3}$$

2) 旋转矢量

在捷联惯导算法中, 旋转矢量一般用来表示更新间隔之间的转动, 可以由角增量经过不可交换性误差补偿得到, 而不是由四元数或旋转矩阵转换得到; 但在本文中随后将要讨论的惯性传感器数据仿真中需要用到四元数或方向余弦矩阵向四元数的转换。定义一个四元数 $\mathbf{q} = [q_0 \quad q_1 \quad q_2 \quad q_3]^T$, 可将其转换为等效旋转矢量 $\boldsymbol{\phi}$:

$$\boldsymbol{\phi} = \frac{1}{f} [q_1 \quad q_2 \quad q_3]^T \quad (2-13)$$

其中

$$f = \frac{\sin \|0.5\boldsymbol{\phi}\|}{\|0.5\boldsymbol{\phi}\|} \quad (2-14)$$

$$\|0.5\boldsymbol{\phi}\| = \tan^{-1} \frac{\sin \|0.5\boldsymbol{\phi}\|}{\cos \|0.5\boldsymbol{\phi}\|} = \frac{\sqrt{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}}{q_0} \quad (2-15)$$

特别地, 如果 $q_0 = 0$, 则:

$$\boldsymbol{\phi} = \pi [q_1 \quad q_2 \quad q_3]^T \quad (2-16)$$

对于方向余弦矩阵 \mathbf{C} 到等效旋转矢量 $\boldsymbol{\phi}$ 的转换, 首先定义:

$$\begin{cases} \alpha = \cos^{-1} \{[tr(\mathbf{C}) - 1]/2\} \\ \mathbf{D} = \frac{(\mathbf{C} - \mathbf{C}^T)}{2 \sin \alpha} \end{cases} \quad (2-17)$$

则等效旋转矢量 $\boldsymbol{\phi}$ 可以表示成:

$$\boldsymbol{\phi} = \alpha [d_{32} \quad d_{13} \quad d_{21}]^T \quad (2-18)$$

其中 d_{ij} 为辅助矩阵 \mathbf{D} 中第 i 行第 j 列对应元素。

3) 方向余弦矩阵

方向余弦矩阵可以由一组欧拉角表示:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \cos\theta\cos\psi & -\cos\phi\sin\psi + \sin\phi\sin\theta\cos\psi & \sin\phi\sin\psi + \cos\phi\sin\theta\cos\psi \\ \cos\theta\sin\psi & \cos\phi\cos\psi + \sin\phi\sin\theta\sin\psi & -\sin\phi\cos\psi + \cos\phi\sin\theta\sin\psi \\ -\sin\theta & \sin\phi\cos\theta & \cos\phi\cos\theta \end{bmatrix} \quad (2-19)$$

罗德里格斯公式描述了旋转矢量到方向余弦矩阵的转换:

$$\mathbf{C} = \mathbf{I} + \frac{\sin\|\boldsymbol{\phi}\|}{\|\boldsymbol{\phi}\|}(\boldsymbol{\phi} \times) + \frac{1-\cos\|\boldsymbol{\phi}\|}{\|\boldsymbol{\phi}\|^2}(\boldsymbol{\phi} \times)^2 \quad (2-20)$$

当 $\boldsymbol{\phi}$ 表示一个很小的转动时 (即 $\|\boldsymbol{\phi}\|$ 很小时), $\sin\|\boldsymbol{\phi}\|/\|\boldsymbol{\phi}\| \approx 1$, 二阶项 $(\boldsymbol{\phi} \times)^2$ 可以忽略, 则上式变为:

$$\mathbf{C} = \mathbf{I} + (\boldsymbol{\phi} \times) \quad (2-21)$$

从四元数同样可以转换到方向余弦矩阵:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 & 2(q_1q_2 - q_0q_3) & 2(q_1q_3 + q_0q_2) \\ 2(q_1q_2 + q_0q_3) & q_0^2 - q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 & 2(q_2q_3 - q_0q_1) \\ 2(q_1q_3 - q_0q_2) & 2(q_2q_3 + q_0q_1) & q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 \end{bmatrix} \quad (2-22)$$

4) 欧拉角

在导航解算中一般不会用到欧拉角, 但是当需要对解算结果进行评价和分析时, 欧拉角物理意义更加直观的优点就能体现出来。通常姿态解算采用四元数或方向余弦矩阵, 从四元数中可以按如下方法提取三个欧拉角:

$$\begin{cases} \phi = \text{atan2}[2(q_0q_1 + q_2q_3), q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2] \\ \theta = \text{asin}[2(q_0q_2 - q_1q_3)] \\ \psi = \text{atan2}[2(q_0q_3 + q_1q_2), q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2] \end{cases} \quad (2-23)$$

值得注意的是, 在实际应用中横滚角, 俯仰角和航向角的取值范围一般分别为: $[-\pi, \pi]$, $[-\pi/2, \pi/2]$, $[0, 2\pi]$, 而反正切函数 atan2 求解得到的航向角取值范围为 $[-\pi, \pi]$, 一般会把航向角转换至 $[0, 2\pi]$ 。欧拉角同样从方向余弦矩阵元素中提取得到:

$$\begin{cases} \phi = \text{atan2}(c_{32}, c_{33}) \\ \theta = \text{atan}(\frac{-c_{31}}{\sqrt{c_{32}^2 + c_{33}^2}}) \\ \psi = \text{atan2}(c_{21}, c_{11}) \end{cases} \quad (2-24)$$

2.3 传感器误差模型

不同等级的惯性传感器输出存在不同大小的测量误差, 因此在输入导航算法

之前，往往需要经过传感器的误差补偿。传感器误差种类很多，一般只考虑主要的误差：零偏，比例因子和非正交，每种误差又可以由系统误差和随机误差构成。这里首先给出传感器的误差模型：

$$\begin{cases} \delta\omega_{ib}^b = b_g + K_g \omega_{ib}^b \\ \delta f_b = b_a + K_a f_b \end{cases} \quad (2-25)$$

其中：

$$K = \begin{bmatrix} s_x & n_{xy} & n_{xz} \\ n_{yx} & s_y & n_{yz} \\ n_{zx} & n_{zy} & s_z \end{bmatrix} \quad (2-26)$$

$\delta(\bullet)$ 表示误差， b_g, b_a 分别表示陀螺和加速度计零偏， s 为比例因子， n 为非正交。

2.3.1 常见随机过程

一般认为随机误差包含不同的误差成分，主要包括：常值误差，重复性，不稳定性，噪声以及温漂。不同误差成分可以用不同的随机过程来描述，这里给出几种常用的随机过程。

1) 高斯白噪声(White Gaussian Noise)

白噪声被定义为一种平稳随机过程，其功率谱密度（Power Spectral Density, PSD）为常值，即其功率在所有频带上分布均匀且严格来说白噪声的带宽是无限大的，其自相关函数定义为：

$$E[w(t)w(\tau)] = q(t)\delta(t - \tau) \quad (2-27)$$

其中 $\delta(\bullet)$ 为冲激函数， $q(t)$ 表示白噪声的方差强度，一般为非负常值。

白噪声可以用来描述惯性传感器的噪声，并且通过不同的滤波器可以产生很多有用的随机过程。若白噪声的概率分布是正态函数，则称作高斯白噪声，本文中的数据处理方法主要基于扩展卡尔曼滤波，因此文中所提到噪声也都是高斯的。理想的白噪声带宽是无限大的，这在实际的物理系统中是不可能的。但当干扰噪声带宽远远大于目标系统带宽时，白噪声是比较理想数学上的近似，因此常被用来描述惯性传感器噪声。

2) 随机游走 (Random Walk)

随机游走由白噪声过程积分得到，可用如下微分方程或差分方程描述：

$$\begin{cases} \dot{x} = w \\ x_{k+1} = x_k + w_k \end{cases} \quad (2-28)$$

随机游走是一个非平稳的随机过程，其状态的不确定性随着时间增加：

$$E(x^2) = q(t)t \quad (2-29)$$

惯性传感器噪声可视为白噪声，考虑到惯性系统实质上是一个积分系统，经常使用角度随机游走（Angle Random Walk, ARW）和速度随机游走（Velocity Random Walk, VRW）来分别描述陀螺仪和加速度计的噪声水平。

3) 随机常数 (Random Constant)

随机常数是一个具有固定幅值的随机量，有如下定义：

$$\begin{cases} \dot{x} = 0 \\ x_{k+1} = x_k \end{cases} \quad (2-30)$$

随机常数可以用来描述初始导航状态和惯性传感器上电初始零偏、比例因子误差。

4) 高斯-马尔可夫过程 (Gauss-Markov Process)

如果一个平稳的高斯过程的自相关性呈指数式递减，则称之为一阶高斯马尔可夫过程，它可以用相关时间 τ 和方差 σ^2 两个参数来描述 (Shin E H, 2005)：

$$\begin{cases} \dot{x} = -\frac{1}{\tau}x + w \\ x_{k+1} = e^{-\Delta t_{k+1}/\tau}x_k + w_k \end{cases} \quad (2-31)$$

其中，已知一阶高斯马尔可夫过程方差和相关时间，可以反算激励白噪声的方差强度 $q = 2\sigma^2 / \tau$ 。

容易看出，相关时间越小，一阶高斯马尔可夫过程就越接近于白噪声，而当相关时间无穷大时，就变成随机游走过程，同时将失去平稳性。在组合导航系统中，一阶高斯马尔可夫过程常用于陀螺和加速度计零偏的建模。

2.3.2 惯性传感器随机误差仿真

如前所述，惯性传感器的随机误差可以看做是几种不同随机过程的组合，下面以陀螺为例介绍传感器误差仿真，给出陀螺仪的随机漂移模型：

$$\varepsilon_g = (\varepsilon_{g,bc} + \varepsilon_{g,bm}) + (\varepsilon_{g,sc} + \varepsilon_{g,sm}) + w_g \quad (2-32)$$

其中 w_g 为白噪声； $\varepsilon_{g,bc}, \varepsilon_{g,bm}$ 表示由零偏引起的漂移，分别是上电初始零偏（建模为随机常数）和缓变的随机零偏误差（建模为一阶高斯马尔可夫过程）；类似于零偏引起的误差漂移， $\varepsilon_{g,sc}, \varepsilon_{g,sm}$ 分别表示比例因子常值误差和缓变误差引起的漂移。

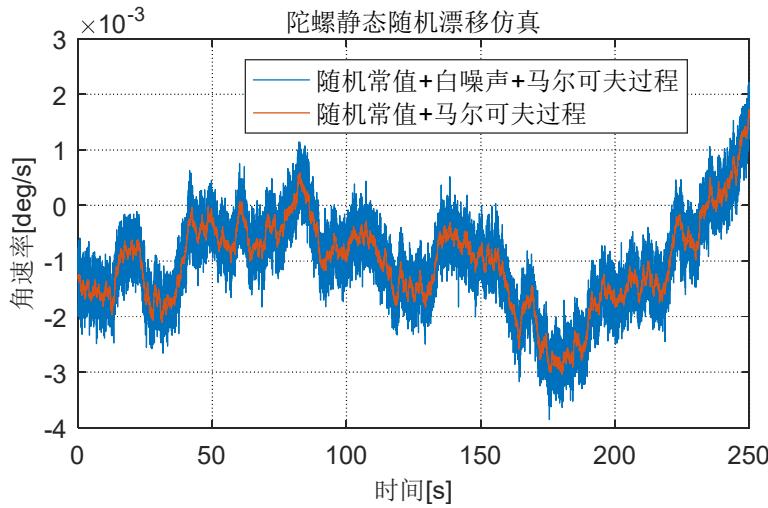


图 2.4 陀螺静态随机漂移仿真

这里给出一个单轴陀螺仪静态随机漂移仿真实例，不考虑地球自转造成的影响，则比例因子引起的误差漂移为 0，陀螺理想输出也为 0。白噪声功率谱密度 $q = 0.001^\circ/s/\sqrt{Hz}$ ，一阶高斯马尔可夫过程标准差 $\sigma = 300^\circ/h$ ，相关时间 $\tau = 100s$ ，初始常值零偏设置为服从 $N(0, 300^\circ/h)$ 的随机常数，仿真结果见图 2.4。

2.3.3 惯性传感器标定

识别传感器误差参数的过程称为标定。惯性传感器标定主要分为离线的转台标定和在线的系统标定：转台标定主要针对系统误差，通过转台提供的参考输入与传感器输出进行比较进而求解误差参数；在线系统标定则针对残余的系统误差和随机误差，误差参数的估计需要充分的运动激励和精确的辅助信息。本文采取的标定方法是：首先进行转台标定，然后在线估计传感器的残余误差。

系统误差标定基于双轴位置转台，加速度计标定采用五位置法，陀螺仪标定采用正反转角位置法，均属常用的标准方法，这里不再赘述。

由于脚部周期性的零速信息并不十分可靠，本文中只对传感器零偏误差进行在线估计。如前所述，零偏误差建模为一阶高斯马尔可夫模型。

2.4 捷联惯导机械编排

首先给出比力方程和姿态微分方程：

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{v}}_{en}^n = \mathbf{C}_b^n \mathbf{f}^b - (2\boldsymbol{\omega}_{ib}^b + \boldsymbol{\omega}_{ib}^b) \times \mathbf{v}_{en}^n + \mathbf{g}^n \\ \dot{\mathbf{C}}_b^n = \mathbf{C}_b^n (\boldsymbol{\omega}_{ib}^b \times) - (\boldsymbol{\omega}_{in}^n \times) \mathbf{C}_b^n \end{cases} \quad (2-33)$$

其中 \times 表示三维矢量的叉乘运算， \mathbf{v} 为速度矢量， \mathbf{f}^b 为比力， \mathbf{g}^n 表示当地重力矢

量在 n 系中的投影，理论上水平方向分量为 0。实用的系统状态更新算法可通过离散化求解上述微分方程得到，推导过程比较繁琐且本文未进行基础惯导算法的相关研究，因此不再赘述，在随后小节直接给出位置、速度和姿态更新公式。

2.4.1 速度更新

速度更新公式通过求解比力方程得到：

$$\mathbf{v}_k^n = \mathbf{v}_{k-1}^n + \Delta \mathbf{v}_{f,k}^n + \Delta \mathbf{v}_{g/cor,k}^n \quad (2-34)$$

其中由比力引起的速度增量可以表示为：

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta \mathbf{v}_{f,k}^n = [\mathbf{I} - 0.5 \boldsymbol{\zeta}_k \times] \mathbf{C}_{b(k-1)}^{n(k-1)} \Delta \mathbf{v}_{f,k}^{b(k-1)} \\ \boldsymbol{\zeta}_k = -(\boldsymbol{\omega}_{ie}^n + \boldsymbol{\omega}_{en}^n)_{k-1/2} \Delta t_k \\ \Delta \mathbf{v}_{f,k}^{b(k-1)} = \Delta \mathbf{v}_{f,k}^b + \frac{1}{2} \Delta \boldsymbol{\theta}_k \times \Delta \mathbf{v}_{f,k}^b + \frac{1}{12} (\Delta \boldsymbol{\theta}_{k-1} \times \Delta \mathbf{v}_{f,k}^b + \Delta \mathbf{v}_{f,k-1}^b \times \Delta \boldsymbol{\theta}_k) \end{array} \right. \quad (2-35)$$

$\Delta \mathbf{v}_{f,k}^b$ 为采样时刻 t_{k-1} 的加速度计速度增量输出， $\Delta \mathbf{v}_{f,k}^{b(k-1)}$ 为划桨效应和旋转效应补偿之后的速度增量，由重力和哥式力引起的速度增量可以表示为：

$$\Delta \mathbf{v}_{g/cor,k}^n = [\mathbf{g}^n - (2\boldsymbol{\omega}_{ie}^n + \boldsymbol{\omega}_{en}^n) \times \mathbf{v}^n]_{k-1/2} \Delta t_k \quad (2-36)$$

$t_{k-1/2}$ 时刻的转移速率 $\boldsymbol{\omega}_{en}^n$ 、地球自转矢量 $\boldsymbol{\omega}_{ie}^n$ 以及重力矢量 \mathbf{g}^n 在 t_{k-1} 时刻是未知的，需要外推得到，由于它们是关于位置和速度的函数，因此要求解它们首先需要对位置和速度进行外推。n 系和 e 系之间的转换关系可以通过一个由经纬度构造的四元数来进行描述，反过来这个转换关系也蕴含了 e 系下的位置信息：

$$\mathbf{q}_n^e = \begin{bmatrix} \cos(-\pi/4 - \varphi/2) \cos(\lambda/2) \\ -\sin(-\pi/4 - \varphi/2) \sin(\lambda/2) \\ \sin(-\pi/4 - \varphi/2) \cos(\lambda/2) \\ \cos(-\pi/4 - \varphi/2) \sin(\lambda/2) \end{bmatrix} \quad (2-37)$$

经纬度的外推实际上可以通过上述四元数的外推获得：

$$\mathbf{q}_{n(k-1/2)}^{e(k-1/2)} = \mathbf{q}_{e(k-1)}^{e(k-1/2)} \otimes \mathbf{q}_{n(k-1)}^{e(k-1)} \otimes \mathbf{q}_{n(k-1/2)}^{n(k-1)} \quad (2-38)$$

其中：

$$\mathbf{q}_{n(k-1/2)}^{n(k-1)} = \begin{bmatrix} \cos \|0.5 \boldsymbol{\zeta}_{k-1/2}\| \\ \sin \|0.5 \boldsymbol{\zeta}_{k-1/2}\| \\ \|0.5 \boldsymbol{\zeta}_{k-1/2}\| \end{bmatrix} \quad (2-39)$$

$$\mathbf{q}_{e(k-1)}^{e(k-1/2)} = \begin{bmatrix} \cos \|0.5 \boldsymbol{\xi}_{k-1/2}\| \\ \sin \|0.5 \boldsymbol{\xi}_{k-1/2}\| \\ \|0.5 \boldsymbol{\xi}_{k-1/2}\| \end{bmatrix} \quad (2-40)$$

$\boldsymbol{\zeta}_{k-1/2}, \boldsymbol{\xi}_{k-1/2}$ 分别表示 n 系和 e 系 t_{k-1} 到 $t_{k-1/2}$ 时刻的等效旋转矢量，可通过如下计

算得到：

$$\begin{cases} \zeta_{k-1/2} = \omega_{in,k-1}^n \Delta t_k / 2 \\ \xi_{k-1/2} = \omega_{ie}^e \Delta t_k / 2 \end{cases} \quad (2-41)$$

其中

$$\begin{cases} \omega_{in}^n = \omega_{ie}^n + \omega_{en}^n \\ \omega_{ie}^e = [0 \ 0 \ \omega_e]^T \end{cases} \quad (2-42)$$

高度状态可以进行如下线性外推：

$$h_{k-1/2} = h_{k-1} - \frac{v_{D,k-1} \Delta t_k}{2} \quad (2-43)$$

同样地，给出速度外推公式：

$$\begin{cases} v_{k-1/2}^n = v_{k-1}^n + \frac{1}{2} \Delta v_{k-1}^n \\ \Delta v_{k-1}^n = \Delta v_{f,k-1}^n + \Delta v_{g/cor,k-1}^n \end{cases} \quad (2-44)$$

其中 Δv_{k-1}^n 为 t_{k-1} 时刻速度更新中求得的速度变化量，存储下来用于 t_k 时刻的速度外推。在外推的纬度、高度以及速度基础上可以求得 $t_{k-1/2}$ 时刻对应的 $\omega_{ie,k-1/2}^n$ 和 $\omega_{en,k-1/2}^n$ ，然后代回式(2-35)完成速度更新。

2.4.2 位置更新

忽略位置涡卷效应引起位置增量，实用的位置（纬经高）更新公式如下：

$$\mathbf{p}_k = \mathbf{p}_{k-1} + \frac{1}{2} \mathbf{M}_{pv} (v_k^n + v_{k-1}^n) \Delta t_k \quad (2-45)$$

其中：

$$\mathbf{M}_{pv} = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_M + h} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{(R_N + h) \cos \varphi} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (2-46)$$

2.4.3 姿态更新

本文实质上是针对惯性传感器跟踪脚步运动进行研究，不同于车载或航空应用，一般认为脚部动态主要是多项式角运动环境，而不是高频圆锥运动环境，因此在离散化时间间隔中认为角运动幅值和方向均服从线性变化假设，采用单子样+前一周期的准二子样算法补偿不可交换性误差，实用的离散化姿态更新公式如下：

$$\mathbf{q}_{b(k)}^{n(k)} = \mathbf{q}_{n(k-1)}^{n(k)} \otimes \mathbf{q}_{b(k-1)}^{n(k-1)} \otimes \mathbf{q}_{b(k)}^{b(k-1)} \quad (2-47)$$

(k) 表示采样时刻 k, $\mathbf{q}_{b(k-1)}^{n(k-1)}$ 是 k-1 时刻的姿态四元数, 相应地 $\mathbf{q}_{b(k)}^{b(k-1)}, \mathbf{q}_{n(k-1)}^{n(k)}$ 则分别表示采样间隔内 b 系和 n 系的转动四元数, 因此有:

$$\mathbf{q}_{n(k-1)}^{n(k)} = \begin{bmatrix} \cos\|\mathbf{0.5}\zeta_k\| \\ \frac{\sin\|\mathbf{0.5}\zeta_k\|}{\|\mathbf{0.5}\zeta_k\|} \zeta_k \end{bmatrix} \quad (2-48)$$

和

$$\mathbf{q}_{b(k)}^{b(k-1)} = \begin{bmatrix} \cos\|\mathbf{0.5}\phi_{ib,k}\| \\ \frac{\sin\|\mathbf{0.5}\phi_{ib,k}\|}{\|\mathbf{0.5}\phi_{ib,k}\|} \phi_{ib,k} \end{bmatrix} \quad (2-49)$$

其中:

$$\phi_{ib,k} = \Delta\theta_k + \frac{1}{12} \Delta\theta_{k-1} \times \Delta\theta_k \quad (2-50)$$

$\Delta\theta$ 为陀螺角增量输出。可以看出, 姿态更新一般仍采用四元数或旋转矩阵的方式, 只是在采样间隔内的角运动用等效旋转矢量表示。

以上就是惯导算法的更新公式。对于捷联惯导系统来说, 一般情况下要求算法精度不大于器件精度的百分之一即可 (严恭敏, 2016)。目前脚绑系统一般使用一些低成本 MEMS 传感器, 往往没有必要采用高精度的纯惯导算法。但本文后面将讨论到脚绑系统的仿真, 面向将来可能会出现的一些高精度应用, 故依然采用了严格的惯导算法。对于低精度的应用, 这里给出一个简化算法编排(Nilsson J O et al, 2014):

$$\begin{bmatrix} \mathbf{p}_k \\ \mathbf{v}_k \\ \mathbf{q}_{b(k)}^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_{k-1} + \mathbf{M}_{pv} \mathbf{v}_{k-1} \Delta t \\ \mathbf{v}_{k-1} + (\mathbf{C}_b^n \mathbf{f}_{b,k} - \mathbf{g}^n) \Delta t \\ \mathbf{q}_{b(k-1)}^n \otimes \Omega(\Delta\theta_k) \end{bmatrix} \quad (2-51)$$

其中 $\Omega(\cdot)$ 表示旋转矢量到四元数的转换, 详见式(2-11)。

2.5 零速修正算法

零速修正是一种常用的方法，是脚绑行人惯性导航系统的核心。零速修正的实施方法主要有曲线拟合，最大似然估计和卡尔曼滤波等（高钟毓等，1995），本文中零速修正主要基于卡尔曼滤波。脚绑行人导航算法实质上就是零速修正辅助惯性导航算法。如图 2.5 所示，算法主要包括三部分：惯导机械编排，零速检测和实时卡尔曼滤波器。

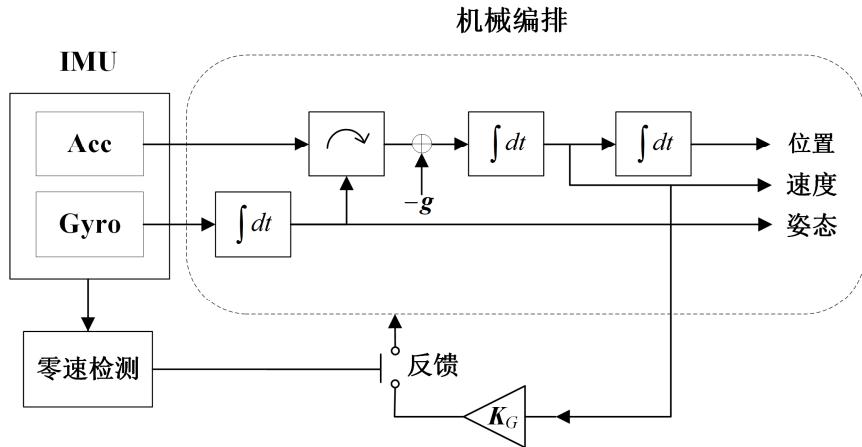


图 2.5 零速修正算法框图

2.5.1 系统模型

首先给出本文中系统状态定义：

$$\mathbf{X} = [\mathbf{r} \quad \mathbf{v} \quad \boldsymbol{\varphi} \quad \mathbf{b}_g \quad \mathbf{b}_a]^T \quad (2-52)$$

本文中惯导与其他系统在n系下组合，区别于前述系统位置状态 \mathbf{p} （纬度，经度，高程）， \mathbf{r} 是地理坐标系下的载体位置，包括平面直角坐标（北坐标，东坐标）和高程。 \mathbf{v} 为速度， $\boldsymbol{\varphi}$ 表示姿态， $\mathbf{b}_g, \mathbf{b}_a$ 分别表示陀螺零偏和加速度计零偏。对捷联惯导系统状态进行扰动分析（n系下），可以分别得到位置、速度、姿态以及传感器零偏的连续时间误差方程：

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\delta\mathbf{r}}^n = -\boldsymbol{\omega}_{en}^n \times \delta\mathbf{r}^n + \delta\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{v}^n + \delta\mathbf{v}^n \\ \dot{\delta\mathbf{v}}^n = \mathbf{C}_b^n \delta\mathbf{f}^b + \mathbf{C}_b^n \mathbf{f}^b \times \boldsymbol{\phi} - (2\boldsymbol{\omega}_{ie}^n + \boldsymbol{\omega}_{en}^n) \times \delta\mathbf{v}^n + \mathbf{v}^n \times (2\delta\boldsymbol{\omega}_{ie}^n + \delta\boldsymbol{\omega}_{en}^n) + \delta\mathbf{g}^n \\ \dot{\delta\boldsymbol{\phi}} = -\boldsymbol{\omega}_{in}^n \times \boldsymbol{\phi} + \delta\boldsymbol{\omega}_{in}^n - \mathbf{C}_b^n \delta\boldsymbol{\omega}_{ib}^b \\ \dot{\delta\mathbf{b}_g} = -1/\tau_g \\ \dot{\delta\mathbf{b}_a} = -1/\tau_a \end{array} \right. \quad (2-53)$$

其中：

$$\delta\theta = \begin{bmatrix} \frac{\delta r_E}{R_N + h} & -\frac{\delta r_N}{R_M + h} & -\frac{\delta r_E \tan \varphi}{R_M + h} \end{bmatrix}^T \quad (2-54)$$

δr^n 表示 n 系下的位置误差矢量, φ 为失准角, 即姿态误差。惯导误差方程描述了惯导误差随时间发散的特性, 是与其他信息源进行组合导航的基础。

对式(2-1), (2-3)以及 GRS80 重力场模型进行扰动分析, 可得系统状态误差导致的转移速率, 地球自转矢量以及当地重力误差, 代回系统状态误差方程并表示为矩阵形式, 可得到如下状态空间描述的连续时间系统模型:

$$\delta \dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{F}(t)\delta \mathbf{X}(t) + \mathbf{G}(t)\mathbf{w}(t) \quad (2-55)$$

其中:

$$\delta \mathbf{X} = \begin{bmatrix} \delta \mathbf{r}^n \\ \delta \mathbf{v}^n \\ \boldsymbol{\phi} \\ \delta \mathbf{b}_g \\ \delta \mathbf{b}_a \end{bmatrix} \quad \mathbf{w} = \begin{bmatrix} w_g \\ w_a \\ w_{bg} \\ w_{ba} \end{bmatrix} \quad (2-56)$$

且有:

$$E(\mathbf{w}(t)\mathbf{w}(\tau)^T) = \mathbf{q}(t)\delta(t-\tau) \quad (2-57)$$

0, I 分别表示三零矩阵和三阶单位矩阵; w_g, w_a 分别为陀螺, 加速度计测量噪声, 其方差强度也可称作随机游走系数, 在组合导航中常用来表示传感器噪声水平; w_{bg}, w_{ba} 分别表示陀螺, 加速度计零偏马尔可夫过程激励白噪声, 可由相应方差(不稳定性)反算得到。

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{rr} & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{M}_{vr} & \mathbf{M}_{vv} & [(\mathbf{C}_b^n f^b) \times] & \mathbf{0} & \mathbf{C}_b^n \\ \mathbf{M}_{\varphi r} & \mathbf{M}_{\varphi v} & -[(\omega_{ln}^n) \times] & -\mathbf{C}_b^n & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{T}_g & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{T}_a \end{bmatrix} \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}_b^n & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{C}_b^n & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (2-58)$$

$\mathbf{T}_g, \mathbf{T}_a$ 分别为描述陀螺仪和加速度计零偏马尔可夫过程的相关时间矩阵:

$$\mathbf{T}_g = \begin{bmatrix} 1/\tau_{g,x} & 0 & 0 \\ 0 & 1/\tau_{g,y} & 0 \\ 0 & 0 & 1/\tau_{g,z} \end{bmatrix}, \mathbf{T}_a = \begin{bmatrix} 1/\tau_{a,x} & 0 & 0 \\ 0 & 1/\tau_{a,y} & 0 \\ 0 & 0 & 1/\tau_{a,z} \end{bmatrix} \quad (2-59)$$

其中下标 x, y, z 分别表示器件三个轴向, 在实际应用中, 除某些特殊情形外(例如 IMU 由三个精度有明显差异的单轴陀螺或加速度计组成), 往往对三个轴向对应的的相关时间等参数不做区分, 即用同一套参数进行建模。另外, 为方便描述系

统矩阵，这里定义四个辅助矩阵：

$$\mathbf{M}_1 = \begin{bmatrix} -\omega_e \sin \varphi & 0 & 0 \\ \frac{R_M + h}{R_M + h} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\omega_e \cos \varphi}{R_M + h} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{M}_2 = \begin{bmatrix} 0 & R_N + h & 0 \\ -(R_M + h) & 0 & 0 \\ 0 & -\tan \varphi (R_N + h) & 0 \end{bmatrix} \quad (2-60)$$

$$\mathbf{M}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{v_E}{(R_N + h)^2} \\ 0 & 0 & \frac{-v_N}{(R_M + h)^2} \\ \frac{-v_E}{\cos^2 \varphi (R_M + h)(R_N + h)} & 0 & \frac{-v_E \tan \varphi}{(R_N + h)^2} \end{bmatrix} \quad \mathbf{M}_4 = \begin{bmatrix} \frac{dg_\varphi}{R_M + h} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -dg_h \end{bmatrix} \quad (2-61)$$

其中：

$$\begin{cases} dg_\varphi = g_0(2\beta_1 \sin \varphi \cos \varphi + 4\beta_2 \sin^2 \varphi \cos \varphi) + 2\beta_4 h \cos \varphi \\ dg_h = \beta_3 + \beta_4 \sin^2 \varphi + 2\beta_5 \end{cases} \quad (2-62)$$

β_{1-5} 为 GRS80 椭球重力场参数：

$$\begin{cases} \beta_1 = 5.2790414e^{-3} & \beta_2 = 2.32718e^{-5} & \beta_3 = -3.087691089e^{-6} \\ \beta_4 = 4.397731e^{-9} & \beta_5 = 7.21e^{-13} \end{cases} \quad (2-63)$$

则系统矩阵 \mathbf{F} 中部分元素可表示如下：

$$\begin{cases} \mathbf{M}_{rr} = -\{[(\mathbf{C}_b^n \mathbf{f}^b) \times] \mathbf{M}_2 + (\boldsymbol{\omega}_{en}^n) \times\} \\ \mathbf{M}_{vr} = [(\mathbf{C}_b^n \mathbf{f}^b) \times](2\mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_3) + \mathbf{M}_4 \\ \mathbf{M}_{vv} = [(\mathbf{C}_b^n \mathbf{f}^b) \times] \mathbf{M}_2 - [(\boldsymbol{\omega}_{en}^n + \boldsymbol{\omega}_{in}^n) \times] \\ \mathbf{M}_{\varphi r} = \mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_3 \\ \mathbf{M}_{\varphi v} = \mathbf{M}_2 \end{cases} \quad (2-64)$$

根据线性系统理论，上述系统模型的离散化形式为：

$$\delta \mathbf{X}_k = \Phi_{k,k-1} \delta \mathbf{X}_{k-1} + \int_{t_{k-1}}^{t_k} \Phi_{k,\tau} \mathbf{G}(\tau) \mathbf{w}(\tau) d\tau \quad (2-65)$$

其中

$$\Phi_{k,k-1} = e^{\int_{t_{k-1}}^{t_k} \mathbf{F}(\tau) d\tau} \approx \mathbf{I} + \mathbf{F}(t_{k-1}) \Delta t \quad (2-66)$$

过程噪声方差的计算过程如下：

$$\begin{aligned}
\mathbf{Q}_k &= E \left\{ \int_{t_{k-1}}^{t_k} \Phi_{t_k, \tau} \mathbf{G}(\tau) \mathbf{w}(\tau) d\tau \cdot \left[\int_{t_{k-1}}^{t_k} \Phi_{t_k, s} \mathbf{G}(s) \mathbf{w}(s) ds \right]^T \right\} \\
&= \int_{t_{k-1}}^{t_k} \Phi_{t_k, \tau} \mathbf{G}(\tau) \int_{t_{k-1}}^{t_k} E \left[\mathbf{w}(\tau) \mathbf{w}(s)^T \right] \mathbf{G}(s)^T \Phi_{t_k, s}^T ds d\tau \quad (2-67) \\
&= \int_{t_{k-1}}^{t_k} \Phi_{t_k, \tau} \mathbf{G}(\tau) \int_{t_{k-1}}^{t_k} \mathbf{q}(\tau) \delta(\tau - s) \mathbf{G}(s)^T \Phi_{t_k, s}^T ds d\tau \\
&= \int_{t_{k-1}}^{t_k} \Phi_{t_k, \tau} \mathbf{G}(\tau) \mathbf{q}(\tau) \mathbf{G}(\tau)^T \Phi_{t_k, s}^T d\tau
\end{aligned}$$

若采用梯形积分，则：

$$\mathbf{Q}_k \approx \frac{1}{2} \left[\Phi_{k, k-1} \mathbf{G}(t_k) \mathbf{q}(t_k) \mathbf{G}(t_k)^T \Phi_{k, k-1}^T + \mathbf{G}(t_{k-1}) \mathbf{q}(t_{k-1}) \mathbf{G}(t_{k-1})^T \right] \Delta t \quad (2-68)$$

若认为离散化时间间隔很小且 $\mathbf{G}(t_k) \mathbf{q}(t_k) \mathbf{G}(t_k)^T$ 在积分间隔内近似为常值，忽略二次项，则进一步有：

$$\mathbf{Q}_k \approx \frac{1}{2} \left[\Phi_{k, k-1} \mathbf{G}(t_k) \mathbf{q}(t_k) \mathbf{G}(t_k)^T + \mathbf{G}(t_k) \mathbf{q}(t_k) \mathbf{G}(t_k)^T \Phi_{k, k-1}^T \right] \Delta t \quad (2-69)$$

上式即为离散时间更新中采用的过程噪声计算公式（Peter S M, 1982）。

2.5.2 量测模型

基于卡尔曼滤波的零速修正的量测模型比较简单，当以速度误差为状态量时，在零速区间内的速度相当于直接对速度误差的观测，因此可以写成如下量测方程形式：

$$\mathbf{H}_k \hat{\mathbf{X}}_k = \mathbf{H}_k \delta \mathbf{X}_k + \mathbf{e}_k, \quad E(\mathbf{e}_k^T \mathbf{e}_k) = \mathbf{R} \quad (2-70)$$

其中：

$$\mathbf{H}_k = [\mathbf{0} \quad \mathbf{I} \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{0}] \quad (2-71)$$

\mathbf{e}_k 为量测噪声，其对应的量测噪声方差-协方差矩阵用矩阵 \mathbf{R} 表示。

2.5.3 零速修正

如图 2.6 所示，在行人行走过程中脚部总是从运动到相对静止再到运动，可以定义任一动作发生（例如脚尖着地）到下次同一动作发生为一个步态周期。在行人导航中，零速信息一般从脚部触地静止或处于准静态的时段获取。零速检测一般基于陀螺和加速度计的原始输出，有三种常用的方法：加速度方差检测（Acceleration-Moving Variance Detector, AMV），角速率能量检测（Angular Rate Energy Detector, ARE），加速度幅值检测（Acceleration-Magnitude Detector, AM）。零速检测的效果往往会影响到传感器噪声的影响，且上述方法一般以统计中的假设检验为理论支撑，因此通常取一段时间或 N 个历元的数据来判断中间时刻或历

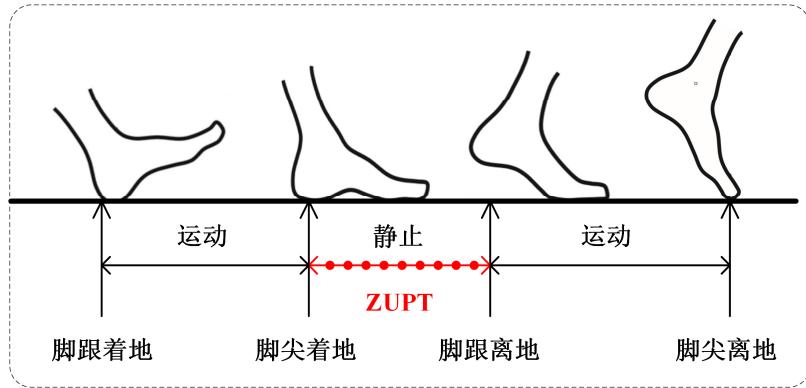


图 2.6 行走过程中的脚部静态区间

元的动静状态。首先给出三种检测器的定义：

1) 加速度方差检测器

加速度方差检测统计量定义如下：

$$T_{AMV} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \left\| \mathbf{f}_k^b - \bar{\mathbf{f}}^b \right\|^2 \quad (2-72)$$

其中 $\bar{\mathbf{f}}^b$ 表示目标区间内平均比力矢量，这种方法实际上是计算检测区间内比力矢量的方差，当方差小于阈值 λ_{AMV} 时，则认为中间历元处于静止状态。

2) 角速率能量检测器

角速率能量检测统计量定义如下：

$$T_{ARE} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \left\| \boldsymbol{\omega}_{ib,k}^b \right\|^2 \quad (2-73)$$

忽略地球自转的影响，理想情况下若脚部处于静止状态，则陀螺三轴角速率应该全为 0，而由于在实际脚部运动中不存在真正的静态环境，因此当三轴角速率幅值的平方小于阈值 λ_{ARE} 时，就认为脚部处于静止状态。

3) 加速度幅值检测器

加速度幅值检测统计量定义如下：

$$T_{AM} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \left(\left\| \mathbf{f}_k^b \right\| - \left\| \mathbf{g}^n \right\| \right)^2 \quad (2-74)$$

静基座环境下，理想的加速度计输出应为与当地重力相反的矢量，因此可以利用比力幅值与当地重力幅值差值的平方来表示比力输出与理论重力矢量的幅值差异，当统计量小于阈值时则判断为静止。

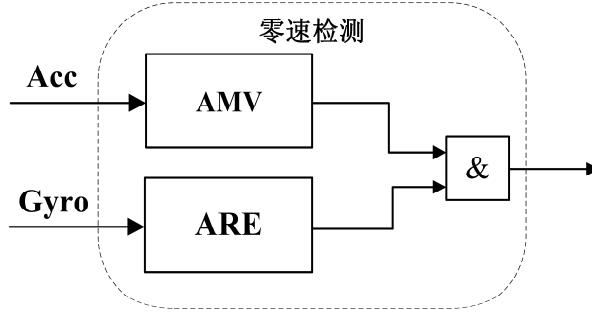


图 2.7 零速检测算法框图

由于加速度幅值检测往往受到加速度计零偏的影响，而在实际的导航任务中一般无法对加速度计零偏进行准确的标定，因此本文中只用到了前两种零速检测方式，如图 2.7 所示，当且仅当加速度方差检测器和角速率能量检测器同时判断为静止时，方可将整个系统判静，才能进行零速修正的量测更新。

2.5.4 脚绑系统可观性分析

至此我们得到了捷联惯导系统模型和零速修正算法的量测模型，它们是基于脚绑惯性传感器的行人导航系统的核心。同样地，对于低成本应用，我们可以对系统模型进行简化，忽略地球自转以及导航系旋转带来的影响，系统矩阵 \mathbf{F} 可以简单写成：

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & [(\mathbf{C}_b^n f^b) \times] & \mathbf{0} & \mathbf{C}_b^n \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{C}_b^n & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -1/\tau_g & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -1/\tau_a \end{bmatrix} \quad (2-75)$$

过程噪声方差矩阵可以由下式计算：

$$\mathbf{Q}_k \approx \mathbf{G}(t_k) \mathbf{q}(t_k) \mathbf{G}(t_k)^T \Delta t \quad (2-76)$$

在以上系统模型和量测模型的基础上，可以使用标准的卡尔曼滤波算法进行系统状态的实时估计。这里对零速修正辅助的惯导系统进行一个简单的可观性分析：只考虑九维导航状态（即位置，速度，姿态），理想的零速环境下（静基座）相应状态转移矩阵 Φ 可以利用简化的系统矩阵 \mathbf{F} 根据式(2-65)近似得到：

$$\Phi = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{Idt} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} & [\mathbf{g}] \times dt \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (2-77)$$

则系统的可观测性矩阵可以写成：

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H} \\ \mathbf{H}\Phi \\ \mathbf{H}\Phi^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} & [\mathbf{g}] \times dt \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & 2[\mathbf{g}] \times dt \end{bmatrix} \quad (2-78)$$

容易求得可观测性矩阵的秩 $r=5$ ，可见 9 个系统状态有 4 个为不可观。首先位置状态对应项系数全为 0，并且如不考虑重力异常， $[\mathbf{g}] \times$ 第三行元素应该全部为 0，所以航向状态也可视为不可观。因此对于脚绑系统来说，只有三维速度，横滚角和俯仰角误差不会随时间不断累积。

2.6 小结

本章主要介绍了行人惯性导航的理论基础，首先介绍了系统中涉及到的坐标系统、姿态表示方法及不同表示方法之间的相互转换关系；然后给出了传感器误差模型和惯导算法编排，包括高精度算法和针对低成本器件的简化算法；接着介绍了足绑系统中零速检测和基于卡尔曼滤波的零速修正算法；最后对脚绑系统的系统状态可观性进行了分析。

3. 脚绑惯性行人导航系统仿真

系统仿真对于导航系统的研发和改进有着重要的意义，组合导航系统的仿真按照类型可以分为数字仿真和半实物仿真，数字仿真可对各种数据和算法进行仿真和验证，半实物仿真可对控制系统方案的正确性和可行性进行验证，主要用于军用装备研发（王强，2016）。其中数字仿真按照输入方式又可以分为基于轨迹参数（即速度或加速度，角度或角速度）的仿真和基于离散轨迹文件（包括位置，速度以及姿态的离散序列）的仿真。本文主要针对前者进行研究。

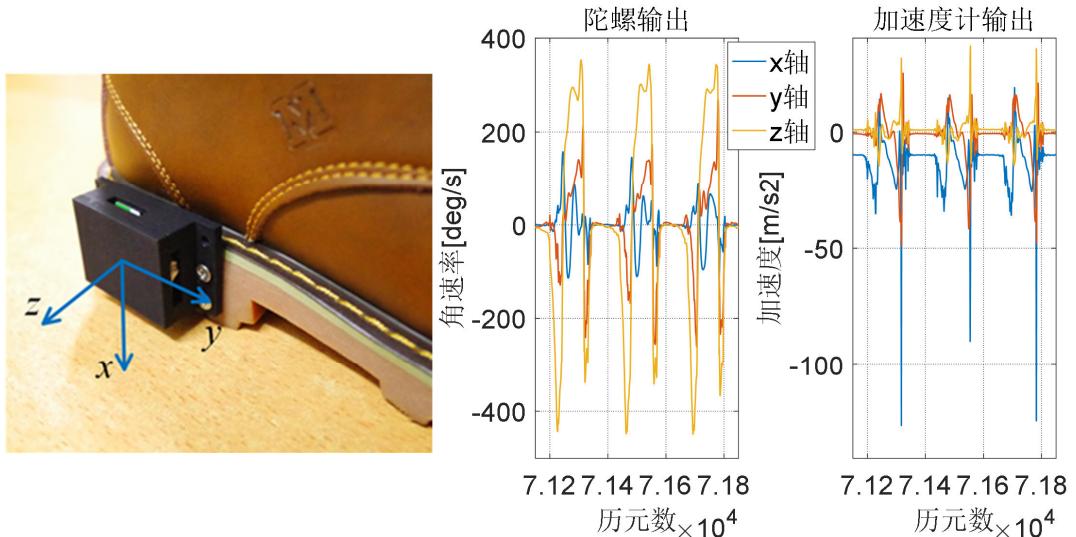


图 3.1 脚绑惯性传感器输出

对于组合导航系统来说，仿真系统实质上就是实际系统算法工作在仿真数据之上，因此接近于真实场景实测数据的仿真数据的产生是进行系统仿真的前提。仿真数据一般是在理想的惯性传感器数据基础上，进行不同等级的噪声污染得到。对于车载，船载等应用来说，理想的惯性传感器数据可以通过人为设定的轨迹参数解算一组相应的轨迹微分方程组得到。轨迹参数的设定过程实质上就是载体运动模型的建立过程。如图 3.1 所示，虽然人体脚部运动存在明显的周期性，但是比较复杂，难以用简单的运动模型来描述，因此本文中采用基于离散轨迹文件的方式进行理想惯性传感器数据的产生。

3.1 惯性传感器数据仿真

基于离散轨迹序列的惯性传感器数据产生流程如图 3.2 所示，在已有离散的位置、速度和姿态（Position, Velocity, Attitude, PVA）真值序列的基础上，可以通过惯导算法的逆向算法反演理想的惯性传感器六轴数据以及系统仿真所需用到

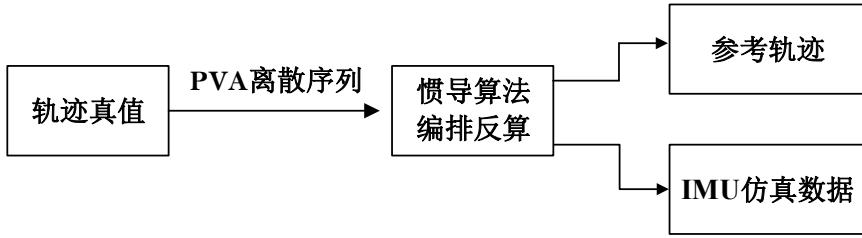


图 3.2 理想惯性传感器数据生产流程

的参考轨迹（王强，2016），由于反算过程中难免存在数值计算误差，因此本文在系统仿真时，没有使用离散的轨迹真值序列作为参考，而是使用本文中反演算法执行过程中同时输出的正向推算结果作为参考真值，在随后小节会进行详细介绍。

3.1.1 惯导反演算法

正向的惯导算法可以定义成：在初始或前一时刻系统状态的基础上，根据加速度计和陀螺仪输出递推得到下一时刻系统状态的过程；惯导反演算法则是在已知两相邻历元系统状态的基础上，计算加速度计和陀螺输出（速度增量和角度增量）的过程。

1) 速度增量反演

在速度更新公式(2-34)、(2-35)的基础上进行移项整理可得比力引起的在 n 系下的速度增量（严恭敏等，2008）：

$$\Delta \mathbf{v}_{f,k}^{b(k-1)} = \mathbf{C}_{n(k-1)}^{b(k-1)} (\mathbf{I} + 0.5 \zeta_k \times) (\mathbf{v}_k^n - \mathbf{v}_{k-1}^n - \Delta \mathbf{v}_{g/cor}^n) \quad (3-1)$$

其中 $\Delta \mathbf{v}_{g/cor}^n$ 可根据式(2-36)计算得到，进一步考虑准二子样的划桨效应和旋转效应误差补偿算法可以得到：

$$\Delta \mathbf{v}_{f,k}^{b(k-1)} = \left\{ \mathbf{I} + \left[\left(\frac{1}{2} \Delta \boldsymbol{\theta}_k + \frac{1}{12} \Delta \boldsymbol{\theta}_{k-1} \right) \times \right] \right\} \Delta \mathbf{v}_{f,k}^b + \frac{1}{12} \Delta \mathbf{v}_{f,k-1}^b \times \Delta \boldsymbol{\theta}_k \quad (3-2)$$

对(3-2)移项整理可得：

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{v}_{f,k}^b &= \left\{ \mathbf{I} + \left[\left(\frac{1}{2} \Delta \boldsymbol{\theta}_k + \frac{1}{12} \Delta \boldsymbol{\theta}_{k-1} \right) \times \right] \right\}^{-1} \left(\Delta \mathbf{v}_{f,k}^{b(k-1)} - \frac{1}{12} \Delta \mathbf{v}_{f,k-1}^b \times \Delta \boldsymbol{\theta}_k \right) \\ &\approx \left\{ \mathbf{I} - \left[\left(\frac{1}{2} \Delta \boldsymbol{\theta}_k + \frac{1}{12} \Delta \boldsymbol{\theta}_{k-1} \right) \times \right] \right\} \left(\Delta \mathbf{v}_{f,k}^{b(k-1)} - \frac{1}{12} \Delta \mathbf{v}_{f,k-1}^b \times \Delta \boldsymbol{\theta}_k \right) \quad (3-3) \\ &\approx \Delta \mathbf{v}_{f,k}^{b(k-1)} - \frac{1}{2} \Delta \boldsymbol{\theta}_k \times \Delta \mathbf{v}_{f,k}^{b(k-1)} - \frac{1}{12} (\Delta \boldsymbol{\theta}_{k-1} \times \Delta \mathbf{v}_{f,k}^{b(k-1)} + \Delta \mathbf{v}_{f,k-1}^b \times \Delta \boldsymbol{\theta}_k) \end{aligned}$$

结合(3-1)、(3-3)就可以通过系统状态状态反演得到加速度计原始速度增量输出。

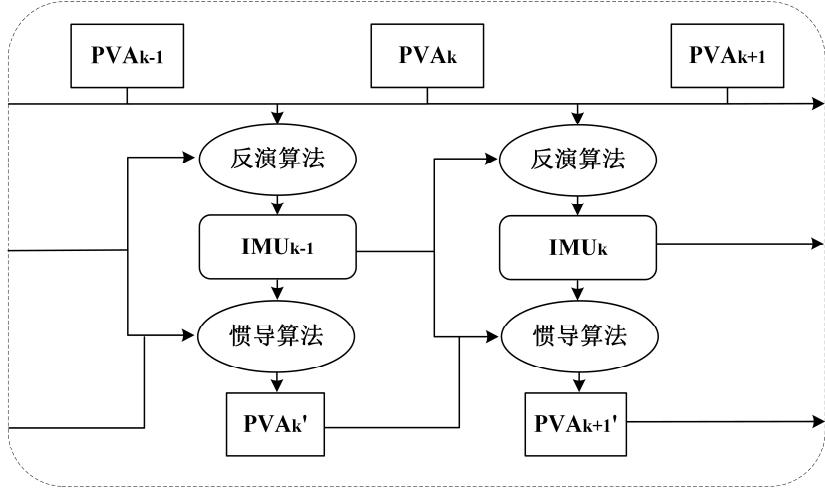


图 3.3 惯性传感器数据反演

2) 角增量反演

将(2-47)中的基于四元数姿态更新公式写成旋转矩阵的形式，并进行移项整理，可得：

$$\mathbf{C}_{b(k)}^{b(k-1)} = (\mathbf{C}_{n(k-1)}^{n(k)} \mathbf{C}_{n(k-1)}^{b(k-1)})^{-1} \mathbf{C}_{b(k)}^{n(k)} \quad (3-4)$$

其中 $\mathbf{C}_{n(k-1)}^{n(k)}$ 可由旋转矢量 ζ_k 进行转换得到， $\mathbf{C}_{b(k)}^{b(k-1)}$ 表示了 b 系从 t_{k-1} 时刻到 t_k 时刻的旋转矩阵，可以转换为等效旋转矢量 $\phi_{ib,k}$ ，根据式(2-50)有：

$$\begin{aligned} \Delta\theta_k &= (\mathbf{I} + \frac{1}{12} \Delta\theta_{k-1} \times)^{-1} \phi_{ib,k} \\ &\approx (\mathbf{I} - \frac{1}{12} \Delta\theta_{k-1} \times) \phi_{ib,k} \\ &\approx \phi_{ib,k} - \frac{1}{12} \Delta\theta_{k-1} \times \phi_{ib,k} \end{aligned} \quad (3-5)$$

至此就得到了准二子样的速度增量和角增量反演算法，图 3.3 给出了相应的算法框图。图中 PVAk、IMUk 分别表示 t_k 时刻的导航状态（位置，速度，姿态）和 IMU 六轴数据，基于 t_{k-1} 时刻反演得到的传感器数据通过惯导算法递推得到 PVAk'。显然速度增量和角增量的计算并不相互独立，在计算 t_k 时刻速度增量时需要用到 t_{k-1} 时刻的速度增量和角增量。在初始零时刻可以认为 $\Delta\theta_k = \phi_{ib,k}$, $\Delta v_{f,k}^b = \Delta v_{f,k}^{b(k-1)}$ ，即认为前一时刻角增量和速度增量都为 0。

3.1.2 抗发散的反演算法

将上节中反演得到的理想的惯性传感器数据输入惯导机械编排，得到的导航状态理论上也可以作为没有误差的参考真值。但由于计算过程中难免存在的数值计算误差，在导航递推的过程中误差可能会不断累积，导致基于理想传感器数据解算得到的导航状态将逐渐偏离数据反演中所用到的导航状态真值序列。对于短时间的数据仿真来说，数值计算累积误差不会造成参考结果相对于轨迹真值的明

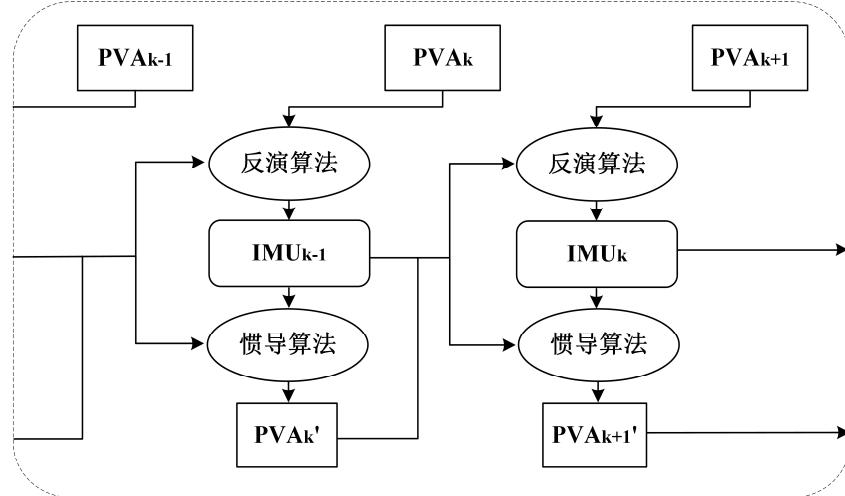


图 3.4 抗发散的惯性传感器数据反演

显偏离，但在数小时甚至更长时间的高精度导航应用中，这种导航状态的发散可能会变得不可接受。因此在理想的惯性传感器数据仿真时，本文使用了一种抗发散的惯导反演算法。

在上节所述在惯导数据反演基础上稍作修改，如图 3.4 中的算法框图所示，不再使用 PVA_{k+1} 和 PVA_k 来进行 IMU_k 的计算，而是使用 PVA_{k+1}' 和 PVA_k' ，如前所述， PVA_k' 是基于 t_{k-1} 时刻反演得到的传感器数据结合前一时刻导航状态 PVA_{k-1}' 通过惯导算法递推得到。通过这种方法可以把数值计算误差始终保持在一个历元以内，因此 PVA_k 和 PVA_k' 能够始终保持很高的重合度。图 3.5 中给出的一个数据反演算例证明了这种算法的有效性。我们在一组脚绑系统导航状态离散

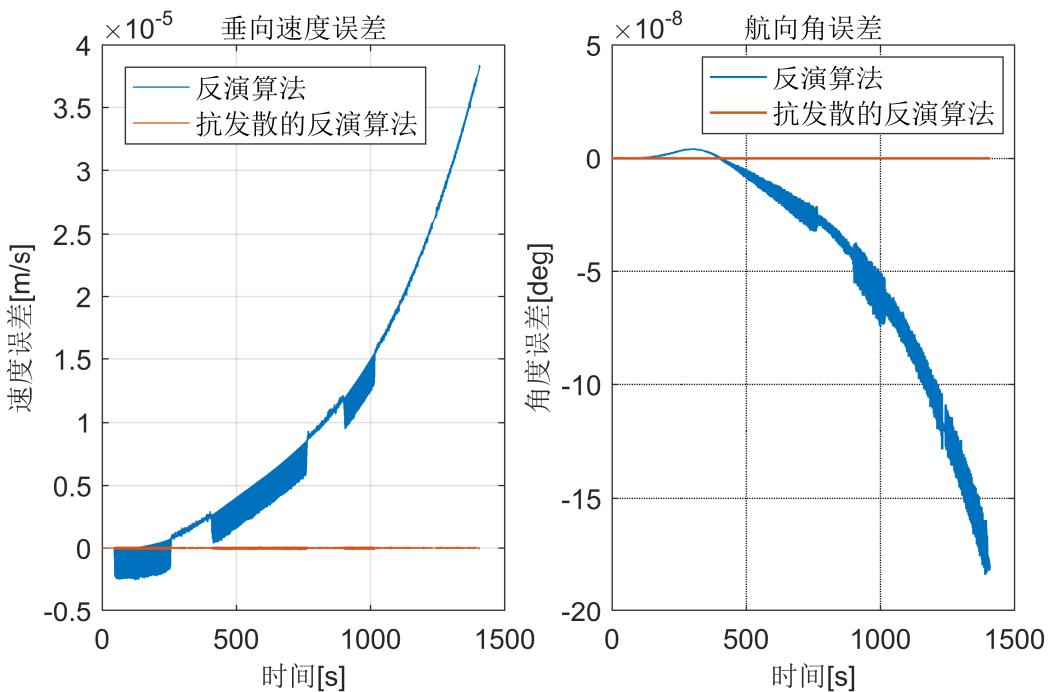


图 3.5 两种反演算法的效果对比

序列的基础上进行惯性传感器数据反演：首先基于上节中所述的反演算法得到传感器数据，然后将产生的六轴数据输入惯导算法得到与参考真值序列同样长度的导航状态序列，左右图中蓝线分别表示两者在垂向速度和航向角上的差异，可以看出递推得到的状态序列与真值序列差异随时间不断增加，在 1500 秒内垂向速度误差发达到 10^{-5} m/s 量级，航向角误差达到 10^{-7} 度量级，且从趋势来看发散速度在不断加快。相比之下，使用本节中的抗发散反演算法得到的结果有明显的改善，与真值序列速度差异始终保持在 10^{-7} m/s 量级，姿态差异在 10^{-14} 度量级。

3.1.3 轨迹真值的产生

对于脚绑行人惯性导航系统来说，系统误差源主要可以分为两部分：一是惯性传感器误差导致的系统误差，二是零速测量误差导致的系统误差。传感器误差除加性的零偏误差以外，还有与载体动态相关的比例因子误差，交轴耦合，非线性等乘性误差。对于工作在低成本 MEMS 惯性传感器上的脚绑系统来说，由陀螺误差引起的航向误差不断累积将成为长时间导航任务总系统误差的主要来源。传感器零偏误差对于姿态精度的影响比较直观，其对于车载和行人导航系统的影响基本一致；而乘性误差导致的系统误差与载体动态紧密相关，考虑到脚部运动的特殊性，需要对脚部动态下传感器乘性误差激发的系统误差进行针对性研究。

另一方面，一般认为即使是脚部触地期间也不存在理想的静止条件（Nilsson J et al, 2012），尤其是在静态区间内角速率一般在几度每秒的范围内波动，因此不太适合施加航向锁定和零角速率修正。零速的量测同样存在系统误差，静态区间内载体速度一般可达厘米级（Peruzzi A et al, 2011）。基于卡尔曼滤波的零速

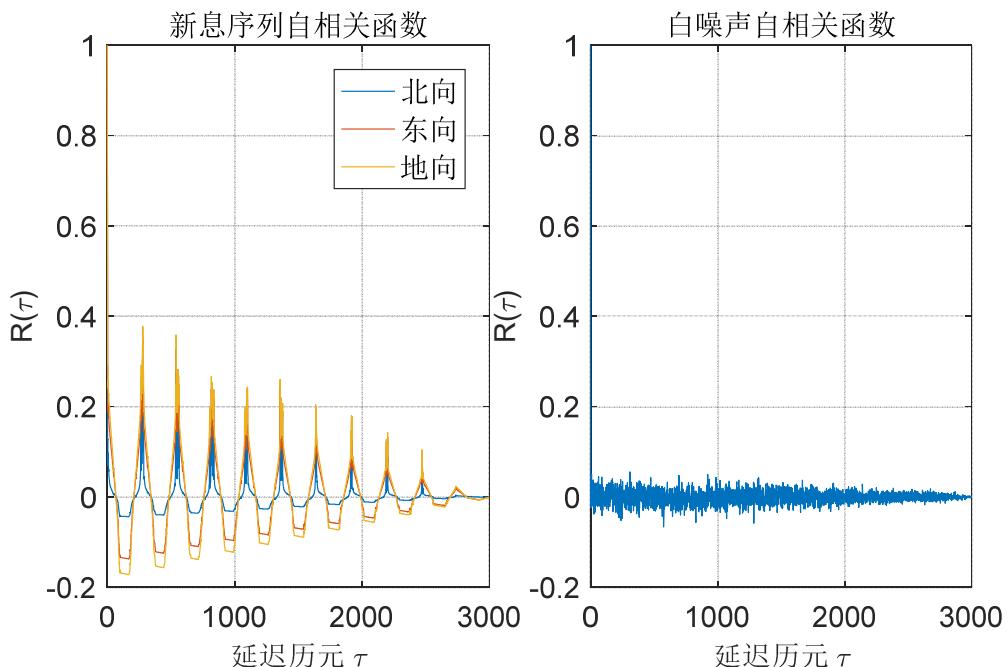


图 3.6 零速量测新息序列自相关性

修正假设速度量测噪声为高斯白噪声，实际上假设并不成立。按照基于卡尔曼滤波的零速修正算法对一组正常步态下的脚绑惯性传感器数据（采样率 200Hz）进行处理，记录每一次量测更新时的信息序列（速度残差），最终可以得到一个新息序列。如图 3.6 中所示，对新息序列求自相关并归一化处理得到图中左图，右图是仿真得到的的高斯白噪声自相关函数。可以看出，零速量测误差不仅同一步内有相关性，而且与随后很多步都相关，与高斯白噪声的特性存在明显差异。因此，对于工作在高精度惯性传感器上的脚绑系统来说，零速量测导致的系统误差可能会取代传感器误差造成的航向漂移，成为系统的主要误差源。因此考虑到未来的高精度脚绑系统，需要对行走过程中脚部的静态特性进行模拟和仿真。

针对上述两种仿真需求：脚部动态和脚部静态特性，分别设计了如图 3.7 中所示的两种理想脚绑惯性传感器数据的产生方法。对于脚部动态特性仿真使用差分 GNSS 位置测量和零速伪量测作为辅助信息，反向平滑结果作为轨迹真值；对于脚部静态特性利用实验室环境下亚毫米级的光学动作捕捉系统提供的位置信息作为辅助信息，反向平滑从而产生轨迹真值。

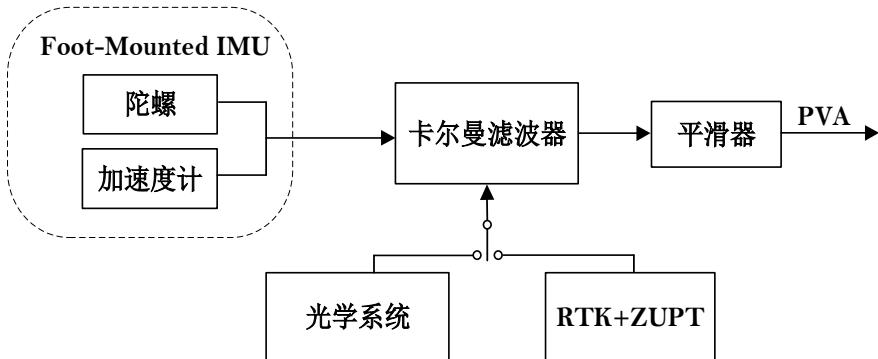


图 3.7 轨迹真值生产流程

1) 位置辅助

第二章中已经给出了基于卡尔曼滤波零速修正算法，因此这里只需给出位置修正的量测模型。对于 GNSS 位置辅助来说，由于 GNSS 天线相位中心和 IMU 传感器坐标系中心一般不重合，因此需要考虑补偿杆臂效应的量测模型：

$$\mathbf{r}_{GNSS}^n = \mathbf{r}_{IMU}^n + \mathbf{M}_{pv} \mathbf{C}_b^n l_{GNSS}^b \quad (3-6)$$

其中 \mathbf{r}_{GNSS}^n 为 GNSS 提供的 n 系下的位置信息， l_{GNSS}^b 为杆臂向量，即 GNSS 天线相位中心在 b 系中的投影，上式可以写成(2-70)中误差方程的形式，稍有别于零速

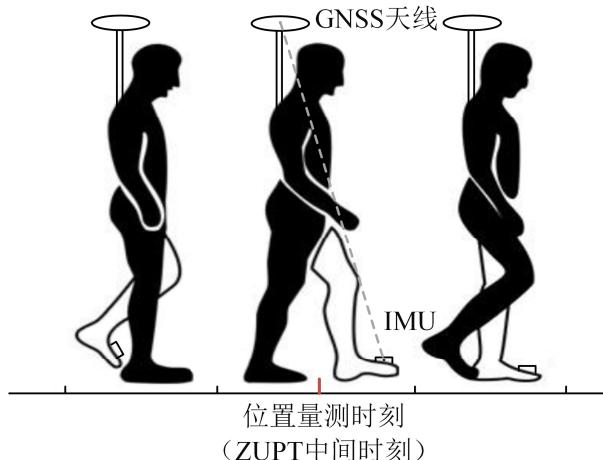


图 3.8 杆臂效应补偿

修正中的速度量测，位置量测方程系数矩阵为：

$$\mathbf{H}_k = [\mathbf{I} \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{0}] \quad (3-7)$$

在行人导航中，惯性传感器安装在脚部，而为了保持良好的信号环境，GNSS 天线一般安装在肩膀或头顶。在行人运动过程中，各关键关节之间存在显著的相对运动，因此杆臂也在不断变化。尽管杆臂变化规律在不同步态周期内有一定的相似性，但是由于人体关节运动的随意性和不确定性，难以实时对杆臂进行精确估计，因此本文中通过指定位置量测时刻的方式来对杆臂效应进行补偿。如图 3.8 所示，假设每个步态周期内静止区间中间时刻杆臂相同，我们就可以选取这个时刻作为位置量测时刻，通过内插的方式得到相应时刻的 GNSS 位置，然后进行位置的量测更新。杆臂的具体大小可以在行走测试开始前进行大致标定。

2) 反向平滑

在位置和速度量测更新一般都会发生系统状态的跳变，基于这样的 PVA 序列生成的惯性传感器数据也会产生与实际不符的跳变。因此在整体最优的同时，为了产生平滑逼真的传感器数据，也要尽量保证局部最优，所以本文在生成轨迹真值的后处理算法中除了正向滤波以外，也加入了反向平滑。反向平滑可以基于经典的 Rauch-Tung-Striebel (RTS) 公式进行，如果以误差状态作为系统状态，即采用间接法进行正向滤波，那么每一步量测更新完成后应当将系统误差状态重置为 0，则对应的最优平滑公式可以写成：

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{A}_k = \mathbf{P}_{k,k} \boldsymbol{\Phi}_k \mathbf{P}_{k+1,k}^{-1} \\ \delta \mathbf{X}_{k,s} = \delta \mathbf{X}_{k,k} + \mathbf{A}_k \delta \mathbf{X}_{k+1,s} \\ \mathbf{P}_{k,s} = \mathbf{P}_{k,k} + \mathbf{A}_k (\mathbf{P}_{k+1,s} - \mathbf{P}_{k+1,k}) \mathbf{A}_k \end{array} \right. \quad (3-8)$$

其中 $\mathbf{P}_{k,k}$ 表示 t_k 时刻验后系统状态方差-协方差矩阵， $\mathbf{P}_{k+1,k}$ 表示 t_{k+1} 时刻预测方差矩阵， $\delta \mathbf{X}_{k,s}$ 表示 t_k 时刻平滑后的系统误差状态。可见进行反向平滑的前提是在正向滤波的过程中存储每一个历元验前和验后的系统状态，方差-协方差矩阵

以及状态转移矩阵。

3.2 惯性传感器数据仿真实例

如上节所述,对行走过程中的脚部动态和静态特性仿真分别选择了不同的辅助信息源。在脚部的动态特性的仿真实验中,我们选择在 GNSS 信号较好的室外开阔场景进行数据采集;在脚部静态特性的仿真实验中,我们在由多个高速相机组成的光学动作捕捉系统室内实验场景进行数据采集。将采集到的惯性传感器数据和辅助系统数据通过上节中所述的方法进行后处理解算,得到理想的惯性传感器数据。

3.2.1 传感器实验平台

在实测数据采集中,我们使用武汉易得路科技有限公司研发的 YDL 穿戴式行人导航模块,如图 3.9 所示。模块内部集成了磁强计、气压高度计和一个 MEMS 惯性传感器阵列。模块支持串口数据传输和 SD 卡实时数据存储。上层智能手机端导航 APP 可以基于低功耗蓝牙通过指令控制模块的工作模式以及数据采集的开始和中断,在导航解算模式下导航结果也通过蓝牙传输至手机端在地图上显示。导航模块功耗较低,使用一个 300mA 的锂电池供电,可连续工作 10 小时。表 3.1 中给出了 YDL 导航模块惯性传感器的详细性能参数。

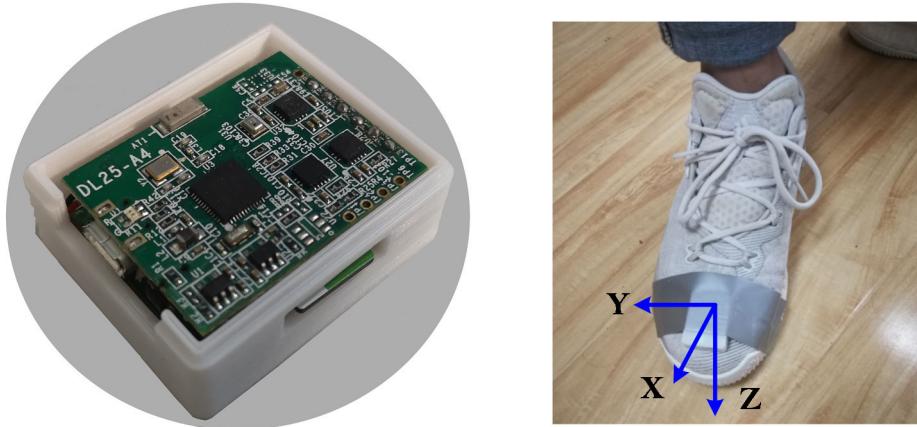


图 3.9 YDL 行人导航模块

表 3.1 YDL 惯性传感器性能参数

参数类型	陀螺仪	加速度计
动态范围	$\pm 2000^{\circ}/\text{s}$	$\pm 16\text{g}$
非线性	0.2%	0.5%
交轴耦合	0.1%	0.3%
随机游走	$0.2^{\circ}/\sqrt{\text{h}}$	$0.01\text{m/s}/\sqrt{\text{h}}$
比例因子	500ppm	800ppm
初始常值零偏	$2^{\circ}/\text{s}$	0.05m/s^2
零偏不稳定性	$10^{\circ}/\text{h}$	0.02mg

3.2.2 GNSS 辅助的数据仿真实例

考虑到单兵武警等应用可能，室外实测选址在华中农业大学的一片实验田内，将 YDL 行人导航模块绑在脚尖进行 IMU 数据采集，GNSS 接收机使用天宝 R9 测量型接收机。设计轨迹见图 3.10，设计实验轨迹全长约 1.7 公里，测试者保持向前行走没有明显折返。测试持续时间约 25 分钟，全程卫星信号条件良好。



图 3.10 室外测试设计路线

测试者携带的天宝 R9 接收机作为流动站，武汉九峰山 IGS 站作为基站，进行差分定位。在 GNSS 数据后处理中用到了 GPS 单系统 L1, L2, L5 三个频段的数据，测试过程中卫星信号环境良好，如图 3.11 中所示，可用卫星数大部分时间内大于 7 颗，位置结果 96.5% 为固定解，3.5% 为浮点解。图 3.12 给出了 GNSS 系统提供的位置结果的内符合精度（一倍标准差），可以看出除了初始化阶段，剩余全时段内位置精度在 5cm 左右，考虑到杆臂补偿的残差也在厘米级以上，

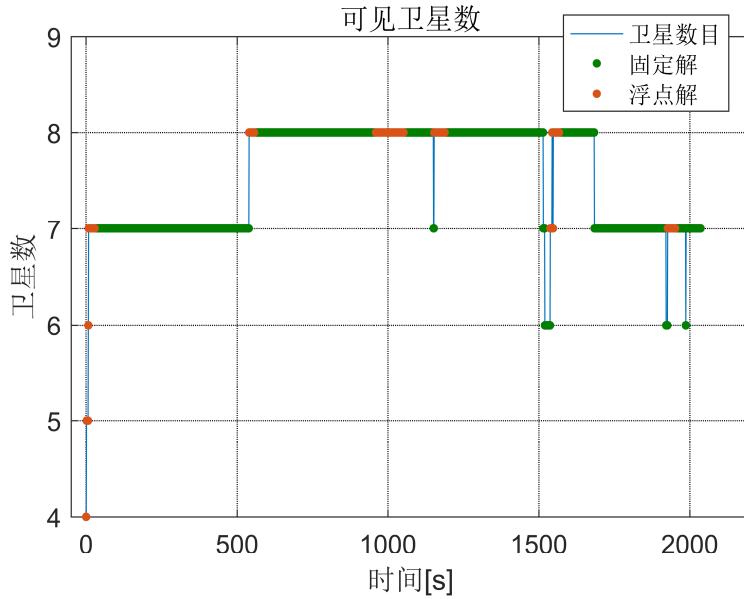


图 3.11 卫星信号情况

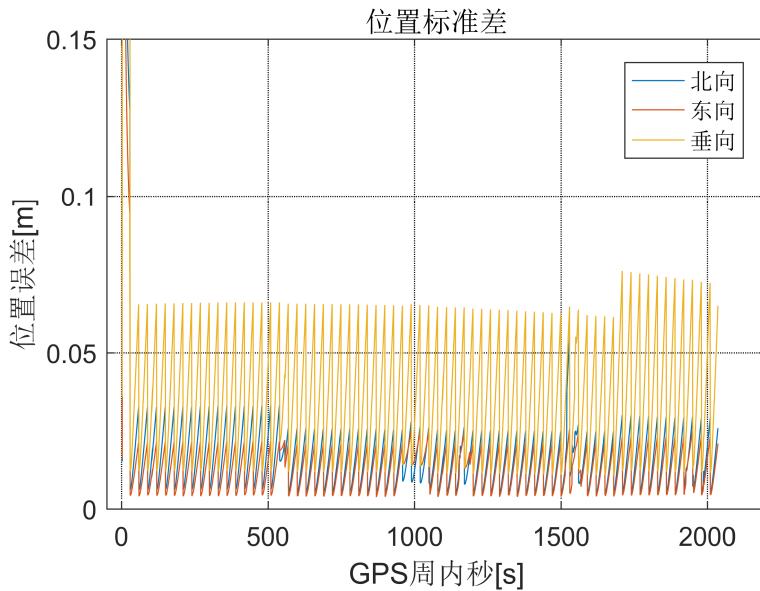


图 3.12 RTK 位置结果标准差

GNSS 提供的位置辅助信息已经足够精确。

在进行组合滤波之前，需要将 GNSS 和 IMU 数据进行时间对齐。由于 GNSS 接收机和脚绑 IMU 模块相互独立，因此较难实现硬件同步。我们在控制模块开始数据采集的蓝牙指令中加入了手机端获取的 UTC 时间，用这种方式给每个历元的 IMU 数据打上时标，通过 UTC 和 GPS 时间系统的转换就可以实现 GNSS 和 IMU 数据的时间同步。低功耗蓝牙数据传输一般存在 1~2ms 的时间延迟，但由于人行走速度一般较小（约 1m/s），因此毫秒级的时间不同步只会相应造成毫米级的位置误差，可以忽略不计。

完成时间对齐后，基于本章 3.1 节中所述的方法进行惯性传感器数据仿真。首先生成了传感器数据反演所需要用到的离散轨迹真值，图 3.13 给出了正向滤波和反向平滑的轨迹结果，可以看出反向平滑能较好地避免位置和速度辅助带来的锯齿状轨迹，这对于随后的惯性传感器数据反演至关重要。

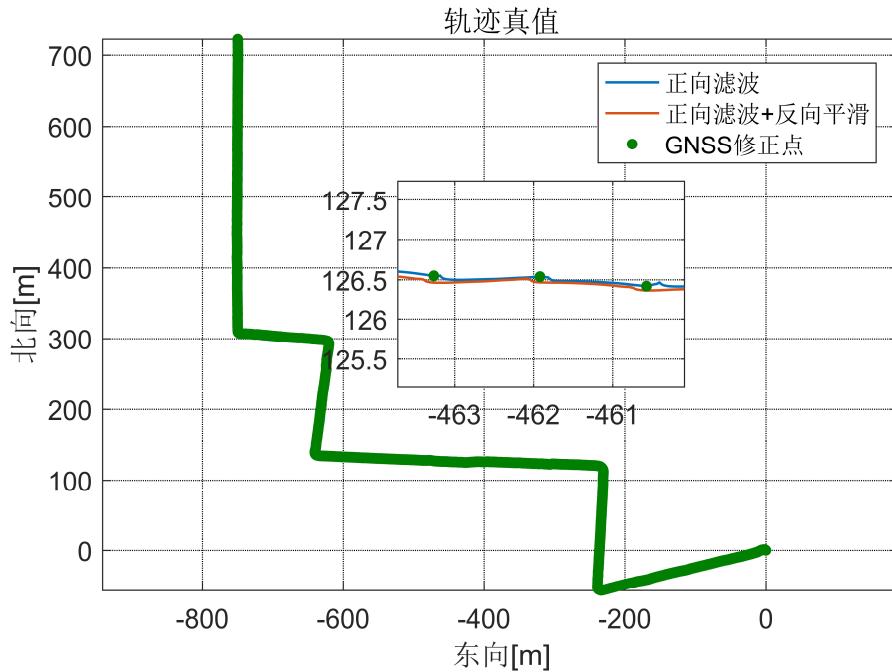


图 3.13 GNSS 辅助的组合导航轨迹结果

在轨迹真值序列的基础上，我们利用 3.1.2 中提到的抗发散反演算法反算理想的六轴惯性数据。反演得到的惯性传感器数据如图 3.14 所示，这里画出了陀螺和加速度计的 z 轴输出。其中黑色虚线，蓝色实线和红色实线分别表示实测数据，基于正向滤波轨迹真值的反演数据，和基于平滑轨迹真值的反演数据。可以明显看出反演得到的理想传感器数据和实测数据符合度很高，区别在于理想的仿真数据是可以认为不存在随机误差的，也就是通过纯惯导算法处理不会产生器件引起的误差漂移。正向滤波过程中反馈修正导致的轨迹跳变同样会在由其反演得到的理想传感器数据中（图中蓝色线出现的跳变）；而反向平滑很好地解决了这个问题，使得仿数据更加符合现实情况。

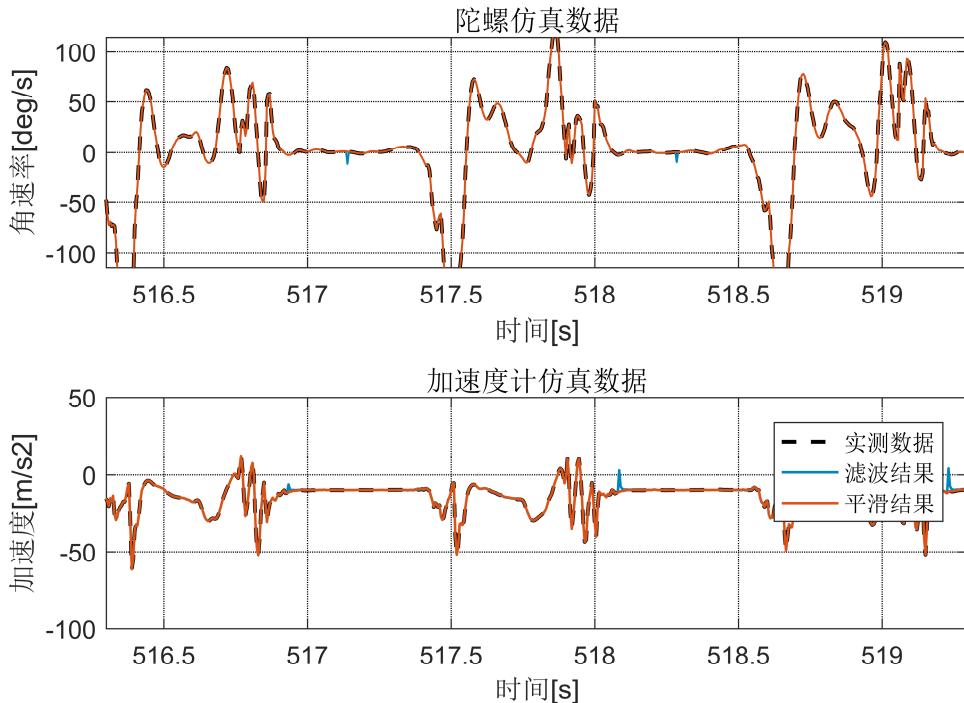


图 3.14 仿真惯性传感器数据

如果对上述得到的三组数据分别进行纯惯导解算，仍然采用准二子样算法，得到的结果如图 3.15 中所示。实测 MEMS 惯性传感器数据由于器件误差的存在，位置漂移得很快，而理想仿真数据的机械编排结果始终与轨迹真值一致。换句话说，理想的仿真数据可以看做是去除了器件误差后的实测数据。因此通过对理想传感器数据加入噪声污染产生仿真数据，在仿真数据的基础上进行行人导航系统仿真是合适的。

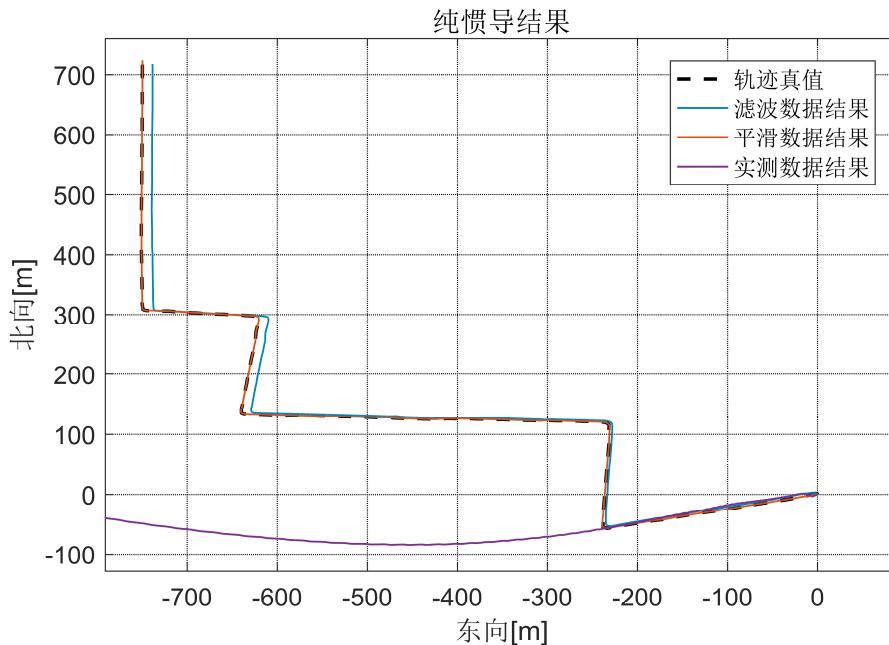


图 3.15 三种数据纯惯导结果对比

3.2.3 光学系统辅助的数据仿真实例



图 3.16 光学动作捕捉系统实验场景

对于一些高精度应用来说，例如未来有可能出现的脚绑导航级系统，零速误差造成的对系统精度影响就变得不可忽略，甚至在一定时间内会取代航向误差发散成为影响系统精度的主要因素，因此我们需要对行走过程中行人脚部的静态特性进行研究。脚部的静态特性可以用脚触地阶段的速度来描述，本小节的主要内容就是设法仿真能够反映脚部触地阶段动态的惯性传感器数据。由于我们的研究对象是脚部静态特性，因此在产生用于数据反演的轨迹真值后处理算法中无法继续用零速修正，因此在本节组合导航数据处理中只用到了位置辅助。在 4×4 平方米的实验场景中，我们使用的 Vicon 光学动作捕捉系统可以提供频率为 480Hz，精度约 0.5mm 的位置信息。我们将 YDL 行人导航模块绑在脚尖用于六轴惯性数据采集，同时在模块中心位置固定一个动作捕捉系统的标记点，如图 3.16 所示，高速相机可以实时精确跟踪标记点的位置。由于实验场景较小，我们的行走轨迹是沿着房间边沿重复的闭环轨迹。在数据处理中，我们使用与上节中同样的方式进行 IMU 数据和光学系统位置结果的时间同步。在进行组合滤波之前，我们首先对 480Hz 的位置辅助信息进行降采样，得到 10Hz 的位置结果。假设位置信息的精度始终保持在 0.5mm 左右，那么 10Hz 的位置结果中蕴含的每个采样点的速度信息精度就可以达到 5mm/s，因此我们可以认为光学系统能够捕捉到最小 5mm/s 的脚部运动。由于我们将光学系统的标记点近似固定在了传感器坐标系中心，因此在数据后处理中无需再对杆臂进行标定。图 3.17 给出了组合滤波得到

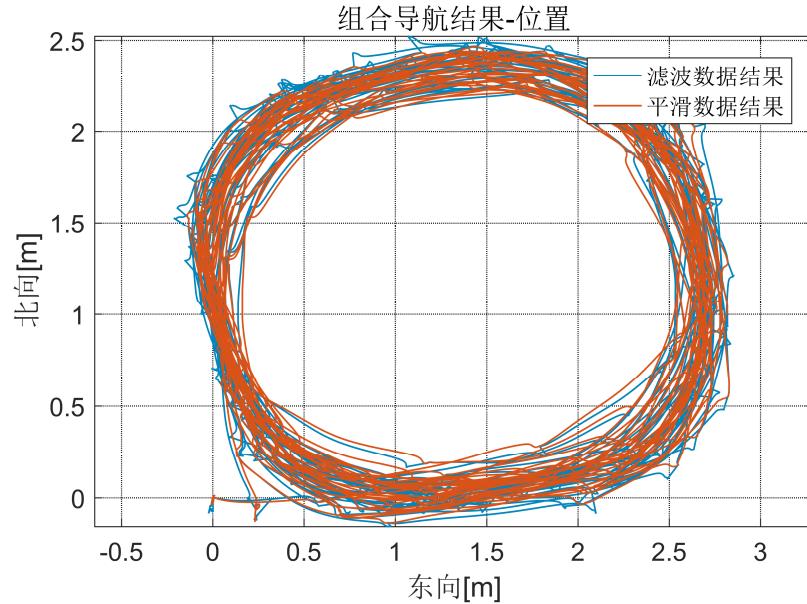


图 3.17 光学系统辅助的组合导航轨迹结果

的轨迹结果。

为了对脚部静态特性进行分析，我们从 10Hz 的光学系统位置参考中提取得到了 10Hz 的速度序列，如前所述，速度序列的精度可以达到 5mm/s。将前向滤波结果，后向平滑结果以及 10Hz 的速度序列参考进行比较，如图 3.18 所示，可以看出在触地静止区间内，脚部速度实际上并不为 0，速度幅值可以达到 1~2cm/s（脚尖）。平滑之后的速度结果和光学系统速度序列符合度很高，因此组合滤波+反向平滑得到的导航状态序列能够很好地反映行走过程中的脚部静态特性。

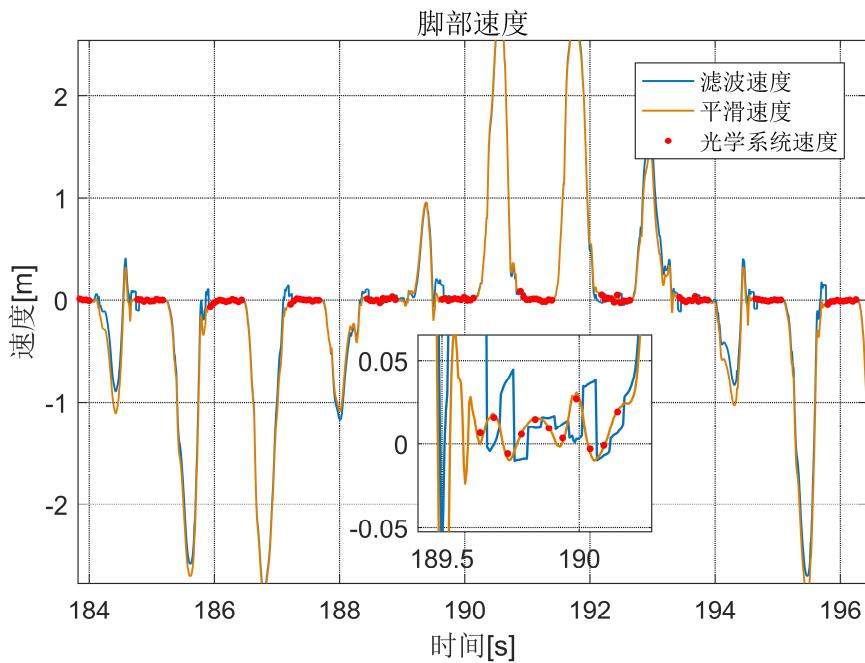


图 3.18 由速度反映的脚部静态特性

同样地，将平滑结果作为轨迹真值，我们通过惯导反演算法得到了理想的惯性传感器六轴数据。为了测试零速测量误差对系统误差的影响，我们分别使用纯惯导算法和零速修正算法对仿真数据进行处理。由于事先没有对目标数据进行数据污染，纯惯导的结果应该是没有误差的理想结果；而由于零速信息存在系统误差，一旦进行量测更新就会引入相应的误差。这样，我们将零速修正算法处理得到的结果与纯惯导结果进行对比，他们之间的差异就是由于零速误差造成的系统误差，仿真轨迹见图 3.19，可以明显看出零速修正处理过后的轨迹明显偏离了参考真值（理想的纯惯导结果）。

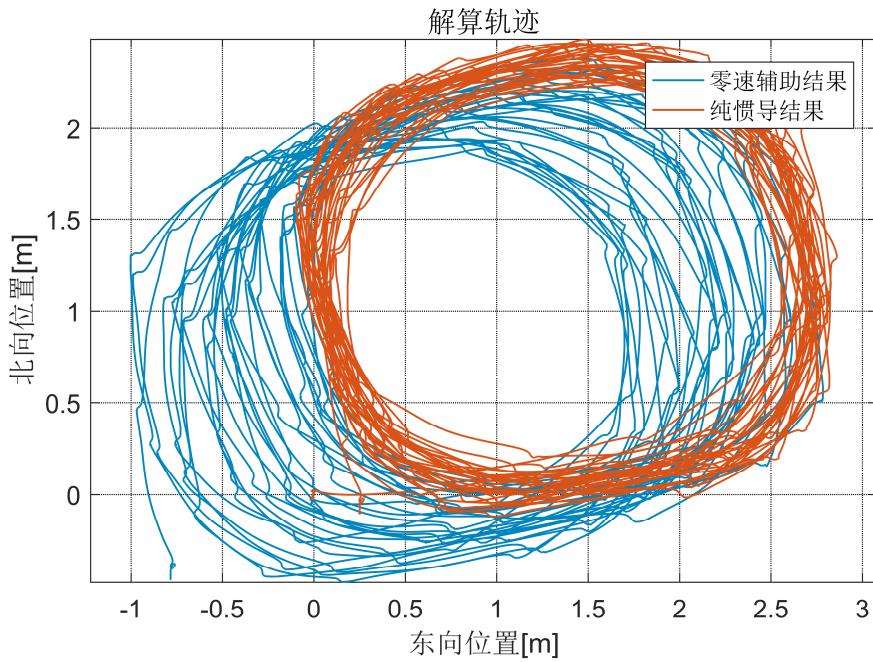


图 3.19 零速量测误差导致的位置误差漂移

图 3.20（见下页）中给出了误差漂移的量化结果，北向、东向和垂向位置误差漂移在 8 分钟的测试内分别达到了 1.0m , 0.3m 和 6.5m ，高度通道的误差发散尤为明显。同时可以发现，尽管我们绕闭环轨迹行走，零速误差导致的位置误差依然表现出明显的累积特性，由此可见在高精度系统中零速测量的系统误差在并不能忽略。高度方向的零速信息相对来说更加不可信，因此往往需要利用气压高度计进行高度阻尼，当气压计由于环境因素不可用时（例如火灾现场），在室内单一楼层中可以认为高度不变对高度进行约束。就脚绑系统本身来说，若将零速检测阈值设置过于宽松，则会引入明显的零速量测带来的系统误差；若将零速检测阈值设置过于严格，则惯导无法得到有效辅助，传感器误差导致系统误差则会相应增加。因此在实际应用中要根据传感器等级和行人运动状态灵活调整零速检测阈值以及滤波器参数，从而得到相对最优的系统性能。

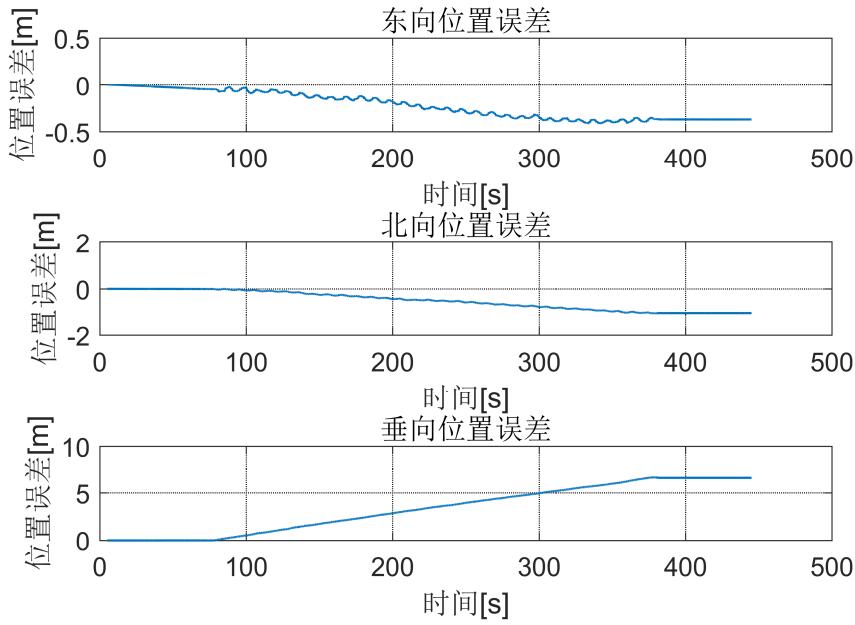


图 3.20 零速量测误差导致的系统误差漂移

3.3 脚绑行人导航系统仿真

基于GNSS辅助的仿真数据虽然由于零速修正丢失了行走过程中的脚部静态信息，但一般来说，对于导航级以下的惯导系统，传感器造成的系统误差要明显大于上节中所述的零速误差。本节中依然基于由室外大范围实测数据产生的理想仿真数据进行各个等级的脚绑惯性系统仿真。

1) 数据污染

模拟各个等级的惯性传感器可以通过在理想无误差的传感器数据基础上注入各个等级的噪声污染来实现。惯性传感器的误差模型已经在 2.3.2 小节中给出，表 3.2 中列出了本节中数据污染考虑到的随机误差成分和特性。本节中针对导航级，战术级和消费级三种等级的典型惯性系统进行仿真，各等级传感器参数见表 3.3。一般情况下初始零偏误差会对系统的后续运行造成很大的影响，但由于在数据的开始阶段存在 30s 左右的静止时段，有助于初始零偏的标定。这里初始零偏

表 3.2 数据污染中用到的误差模型

误差成分	性质	建模
初始零偏误差	加性误差	随机常数
零偏不稳定性	加性误差	高斯马尔可夫过程
比例因子误差	乘性误差	随机常数
白噪声	加性误差	白噪声
交轴耦合	乘性误差	随机常数

误差设置为从均值为 0, 标准差为零偏不稳定性的正态分布中取得的一个随机常值。

表 3.3 各等级典型惯性器件性能参数

器件等级		导航级	战术级	消费级
零偏 不稳定性	陀螺	0.005 °/h	0.5 °/h	30 °/h
	加表	25 mGal	0.05 mg	0.5mg
随机 游走	陀螺	0.0022 °/√h	0.15 °/√h	0.01 °/s/√Hz
	加表	0.00075 m/s/√h	0.07 m/s/√h	300 ug/√Hz
比例 因子 误差	陀螺	10 ppm	500 ppm	0.2%
	加表	10 ppm	300 ppm	0.2%

2) 系统仿真

将脚绑惯性导航算法运行在经过污染的仿真数据基础上, 得到不同等级的脚绑系统仿真结果。对于每个等级的系统, 将 50 次独立仿真结果作为统计结果。得到的位置误差椭圆如图 3.21 所示, 表 3.4, 3.5, 3.6 分别给出了导航级, 战术级和消费级系统的位置和姿态误差统计结果。

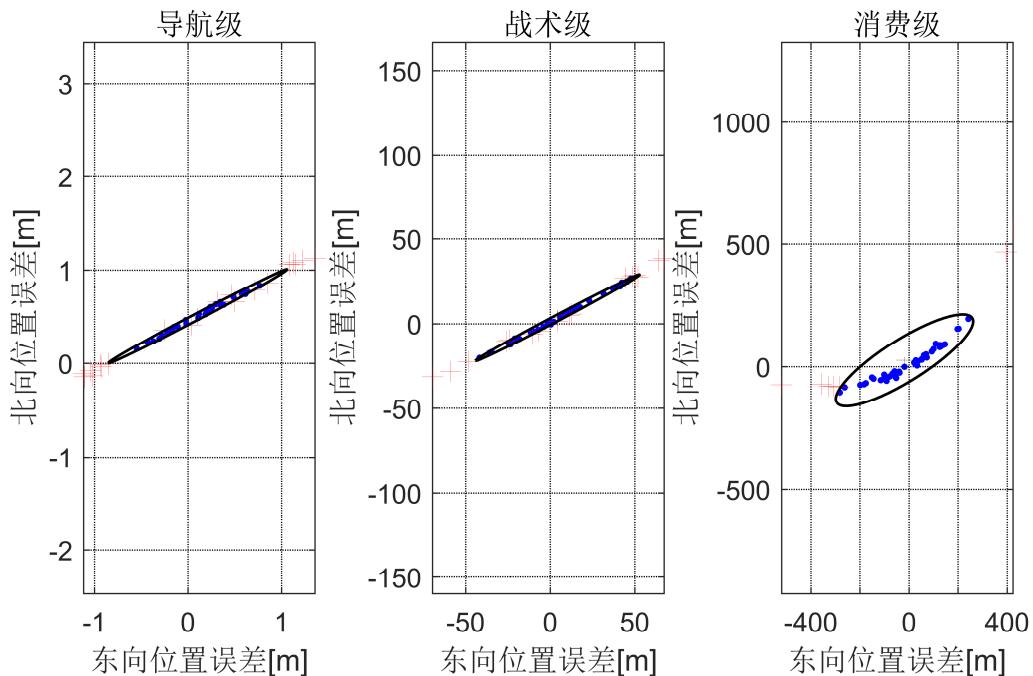


图 3.21 不同等级系统仿真结果

由于在轨迹真值生成过程中使用了零速修正, 因此仿真数据失去了行走过程中的脚部静态特性, 也就是说可以认为零速信息是不存在误差的, 可靠的零速修正带来的对横滚角和俯仰角良好的观测条件使得水平姿态在各个等级的系统中都保持着较高的精度, 但实际上由于零速信息的质量问题水平姿态角精度可能会

表 3.4 导航级系统仿真结果

导航级	北向位置 (m)	东向位置 (m)	高度 (m)	横滚角 (°)	俯仰角 (°)	航向角 (°)
最大误差	1.13	1.36	1.21	0.0030	0.0030	0.13
均方根误差	0.60	0.63	1.17	0.0013	0.0014	0.07

表 3.4 战术级系统仿真结果

战术级	北向位置 (m)	东向位置 (m)	高度 (m)	横滚角 (°)	俯仰角 (°)	航向角 (°)
最大误差	38.77	67.25	1.62	0.03	0.07	7.84
均方根误差	17.15	32.02	1.20	0.01	0.03	3.68

表 3.6 消费级系统仿真结果

消费级	北向位置 (m)	东向位置 (m)	高度 (m)	横滚角 (°)	俯仰角 (°)	航向角 (°)
最大误差	562.68	423.82	3.13	0.19	0.29	54.97
均方根误差	125.57	184.07	1.56	0.08	0.13	22.35

出现恶化。这样仿真得到的系统误差可以认为几乎全部由传感器误差引起。可以看出对于导航级系统来说，传感器误差造成的位置误差优于行走里程的千分之一，此时应当考虑零速测量误差造成的系统误差；对于战术级系统来说，传感器误差造成的航向角误差是主要误差源，位置误差的发散主要是因为脚绑系统航向不可观测；同样地，对于消费级器件来说，器件误差导致的航向误差主导了系统位置误差的发散。

3.4 小结

针对脚部运动复杂，脚绑惯性传感器数据难以利用数学运动模型模拟的问题，本章中设计了一种基于实测数据的脚绑惯性传感器数据仿真方法，能够在低等级 MEMS 传感器实测数据基础上得到没有误差的理想传感器数据。并使用上述算法仿生成了脚绑场景下的各等级典型惯性传感器数据，从而评价了基于各等级惯性器件的脚绑系统的定位性能，用以作为系统设计和传感器选型的重要参考。然后，从行走过程中的脚部动态和静态特性两方面对脚绑行人惯性导航系统的误差来源进行了仿真分析，发现对于低成本惯性器件的系统来说，传感器误差是系统误差的主要来源；而对于导航级以上系统，零速测量的精度会成为制约系统精度的主要因素。

4. 基于等式约束的双系统融合方法

很多学者在左右脚各安装一个惯性传感器，通过双系统的组合来消除行走过过程中双脚系统产生的对称性误差，从而能够得到更加精确可靠的位置估计。宏观上来说，可以把行人当做一个质点，行人位置通过对双脚系统位置估计直接求平均获得。但更优的策略是通过一个空间距离约束融合双系统信息(Brand T J, 2003; Laverne M et al, 2011; Prateek G V et al, 2013; Shi W et al, 2017; Skog I et al, 2012)，这样不仅消除了对称性误差，同时距离约束也可以为某些导航状态提供一定的观测能力，所以一般认为基于约束的双系统数据融合是一种更优的策略。

双系统数据融合算法根据约束信息的不同可以分成空间距离和不等式约束和等式约束：不等式约束假设双脚之间存在一个空间距离上限，在双系统由于误差发散导致彼此之间距离超过预先设定的阈值时施加约束，但器件误差的随机性可能会恰好导致双系统误差向相同或相似的方向发散，这时两系统给出的位置估计虽然都偏离了真值，但仍然满足不等式约束，从而导致约束失效。相比之下等式约束理论上更加稳定且能为系统状态提供更好的观测能力，但需要装配额外的测距设备。约束根据施加方法的不同一般可以分为硬约束和软约束(刘杰, 2011)。硬约束方法主要有投影法(Yang C, Blasch E, 2009)，两步约束法(Julier S J, Laviolar J J, 2007)等，硬约束的施加能够使得导航状态严格满足约束方程，因此比较适合不等式约束；相对于硬约束，软约束是那些应当近似满足而非精确满足的约束条件。当约束条件不太严格，或者约束函数有些不确定性或模糊性的情形下，我们一般使用软约束。由于距离量测往往存在误差，软约束比较适合等式约束。软约束的施加方法主要是伪量测法(Tahk M, Speyer J L, 1990)。

4.1 双脚等式约束方法

基于等式约束的双系统融合方法一般需要额外的测距设备（例如声呐发射机和接收机）提供双系统之间的距离信息，成本较高且较难实现与脚绑系统的时间同步。本文从行人的步态特征中发掘得到一个可靠并且周期性出现的等式距离约束，并依此进行双脚系统的数据融合，实验证明这种方法能够有效提高系统精度。

4.1.1 系统模型

一个双脚系统由在左右脚安装的两个单系统构成，相应地我们应该把系统状态增广一倍：

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}^{(1)} & \mathbf{X}^{(2)} \end{bmatrix}^T \quad (4-1)$$

其中上标($i=1, 2$)用来表示左右脚两个子系统，和(2-52)中的定义一样，每个子系

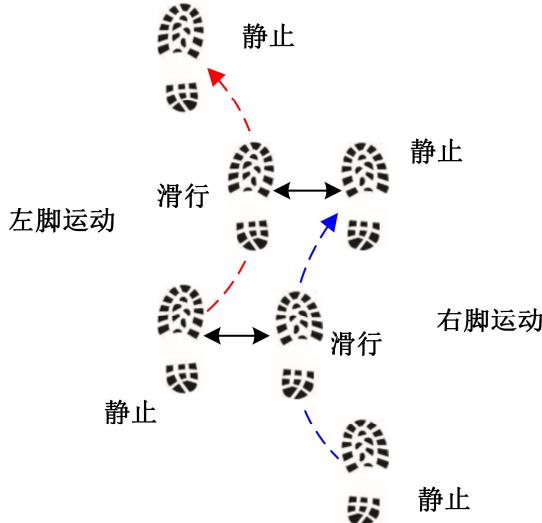


图 4.1 行人双脚步态模式

统的系统状态定义为位置,速度,姿态和六轴传感器零偏,则增广后的系统状态为 30 维。将增广后的系统方程写成误差方程的形式,可以得到如下状态空间模型描述:

$$\delta \mathbf{X}_k^{(i)} = \Phi_{k,k-1}^{(i)} \delta \mathbf{X}_{k-1}^{(i)} + \mathbf{w}_k^{(i)} \quad (4-2)$$

同样假设过程噪声为加性高斯白噪声, \mathbf{Q} 表示过程噪声方差矩阵, Φ 为状态转移矩阵。由于对系统状态进行了增广, 则相应地 Φ, \mathbf{Q} 应当增广为:

$$\Phi = \begin{bmatrix} \Phi^{(1)} & \mathbf{0}_{15,15} \\ \mathbf{0}_{15,15} & \Phi^{(2)} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}^{(1)} & \mathbf{0}_{12,12} \\ \mathbf{0}_{12,12} & \mathbf{Q}^{(2)} \end{bmatrix} \quad (4-3)$$

其中 $\mathbf{0}_{p,q}$ 表示 p 行 q 列的零矩阵。双系统的零速修正方法同单系统保持一致, 在双脚各自的零速检测器判定当前时刻为静止时进行零速量测更新。

4.1.1 启发式等式约束

在一个正常的步态周期中, 如图 4.1 所示, 双脚间的空间距离首先减小, 然后增加, 因此我们可以说每一个步态周期中双脚之间都存在一个最短距离。通过分析行人的步态模式, 我们发现这个最短距离对同一个人来说保持相对稳定。我

表 4.1 最短距离序列统计结果

实验样本	总步数	最短距离 最大值(mm)	最短距离 最小值(mm)	标准差 (mm)
样本 #1	235	298.51	227.05	13.31
样本 #2	244	311.43	250.38	12.10
样本 #3	224	289.51	224.53	13.28
样本 #4	234	273.43	212.38	12.04

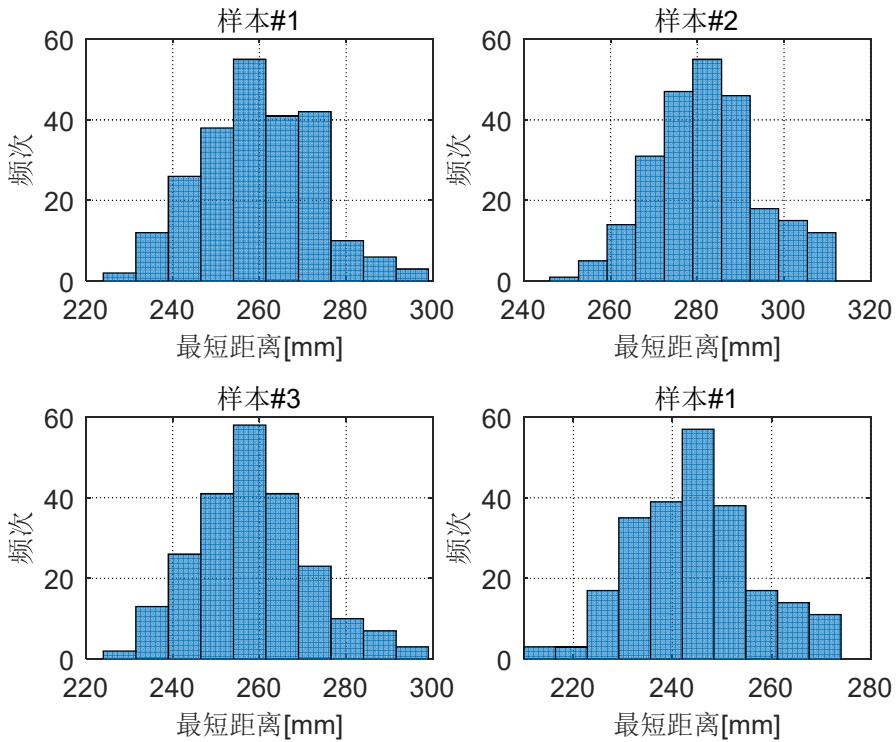


图 4.2 最短距离统计直方图

们使用上一章节中提到的亚毫米级光学动作捕捉系统来对这个猜想进行了验证。在实验中我们把两个光学系统标记点固定在实验人员的脚尖，光学系统能够实时跟踪标记点并且以 480Hz 的频率输出系统坐标系下标记点的位置坐标。我们对 4 个健康状况良好的实验者进行了测试，每人以正常的速度步行五分钟（每人大约 200 步）。我们可以基于动作捕捉系统提供的位置信息计算得到每个实验样本的最短距离序列，表 4.1 列出了最终的统计结果，图 4.2 给出了相应的直方分布。

可以看出，虽然不同的测试者两脚之间最短距离从数值大小上有明显差异，但对于同一个人来说，不同脚步周期的最短距离相对比较稳定，所有测试者对应的最短序列标准差都保持在 2cm 以内。尽管测试结果可能会随着光学系统标记点在脚上安装的位置不同而产生变化（例如安装在脚跟），但最短距离的统计结果应该会表现类似的性质。基于这个现象，我们可以构造一个等式距离约束：

$$z_c = f(\mathbf{X}^{(1)}, \mathbf{X}^{(2)}) \quad (4-4)$$

这里 z_c 是一个标量，表示上面提到的最短距离，在本文中对于某一特定测试者可以被视作一个常值。 $f(\cdot)$ 代表两点欧式距离的测量函数。需要注意这里的最短距离虽然比较稳定，但在不同的步态周期内还是存在差异的，所以约束并不是严格成立的，我们把这个约束看做软约束施加到系统中去。处理软约束一般可以使用伪量测法，即用附加噪声的强度来表示约束方程的符合程度。方便起见，我们把这里注入的量测噪声也视作高斯白噪声，这样就可以写出相应的量测方程：

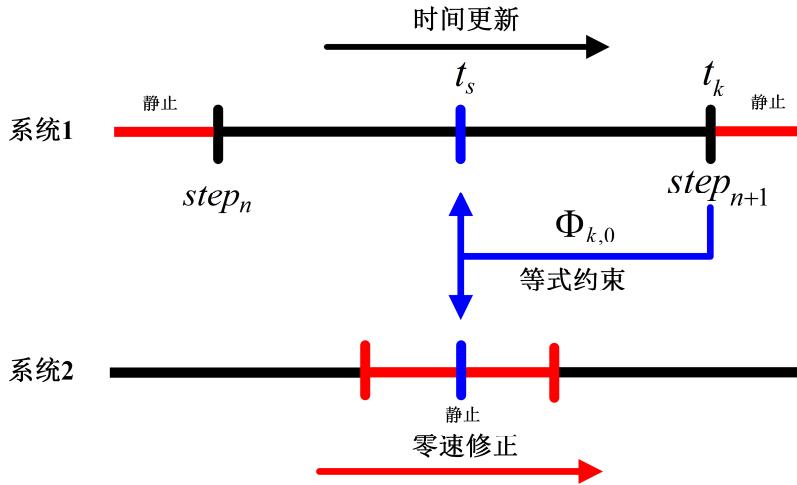


图 4.3 等式约束的时滞量测

$$z_c = \|\mathbf{L}\mathbf{X}_k\| + e_k, \quad e_k \sim N(0, r) \quad (4-5)$$

其中

$$\mathbf{L} = [\mathbf{I}_3 \quad \mathbf{0}_{3,12} \quad -\mathbf{I}_3 \quad \mathbf{0}_{3,12}] \quad (4-6)$$

这里 \mathbf{I}_p 表示 p 阶单位矩阵。为了在卡尔曼滤波框架下进行量测信息的融合，需要对上述非线性量测模型进行线性化：

$$z_c = \mathbf{J}_k \mathbf{X}_k + e_k \quad (4-7)$$

其中 \mathbf{J} 表示雅克比矩阵，可利用先验的系统状态估计求取：

$$\mathbf{J}_k = \left[\frac{\delta f}{\delta [\mathbf{X}]_1} \Big|_{\mathbf{X}=\hat{\mathbf{X}}_k} \frac{\delta f}{\delta [\mathbf{X}]_2} \Big|_{\mathbf{X}=\hat{\mathbf{X}}_k} \cdots \frac{\delta f}{\delta [\mathbf{X}]_n} \Big|_{\mathbf{X}=\hat{\mathbf{X}}_k} \right] \quad (4-8)$$

至此我们就得到了双脚系统等式约束算法的系统模型和量测模型，当最短距离量测发生时我们可以将其以伪量测的形式在扩展卡尔曼滤波框架下进行加权融合。

4.2 实时系统中的时滞量测处理

考虑到在实时系统中的应用，双系统最短距离约束算法的实现仍需要考虑一个时滞量测问题。一般来说为了找到一个步态周期内的最短距离，我们需要遍历整个步态周期中的每一个历程，也就是说只有在一步结束后我们才能获得这个最短距离量测以及相对应的具体时刻。因此在 t_s 时刻发生的量测实际上在 t_k 时刻才到达 ($k > s$)，如时序图 4.3 中所示。行人步态周期一般在 1s 左右，量测的在时间上的滞后大约在 0.5s 左右，延迟已经足够大以至于不能被忽略。这里我们采用了文献 (Larsen T D et al, 1999) 提出的一个计算量较小的方法来处理这些滞后的量测。在 t_s 时刻本该进行量测更新，量测方程按式(4-7)可以定义为：

$$z_c = \mathbf{J}_s^* \delta \mathbf{X}_s + e_s \quad (4-9)$$

这里的上标*表示量测存在时延，那么本该在 t_s 时刻生效的残差（信息）可以通过量测方程外推的方法在 t_k 时刻进行融合：

$$\begin{aligned} z_k^{int} &= \mathbf{J}_k \hat{\mathbf{X}}_k + z_c - \mathbf{J}_s^* \hat{\mathbf{X}}_s \\ &= \mathbf{J}_k \mathbf{X}_k + \mathbf{J}_k \delta \mathbf{X}_k + e_s^* + \mathbf{J}_s^* \mathbf{X}_s - \mathbf{J}_s^* \hat{\mathbf{X}}_s \\ &= \mathbf{J}_k \mathbf{X}_k + (e_s^* + \mathbf{J}_k \delta \mathbf{X}_k - \mathbf{J}_s^* \delta \mathbf{X}_s) \\ &= \mathbf{J}_k \mathbf{X}_k + e_k^{int} \end{aligned} \quad (4-10)$$

这里 z_k^{int} 表示外推的距离量测信息，显然 e_k^{int} 此时不再是零均值的高斯白噪声。在扩展卡尔曼滤波框架下， t_k 时刻的后验估计误差可以通过基于外推量测的量测更新获得：

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{X}_{k,k} &= \delta \mathbf{X}_{k,k-1} + \mathbf{K}_k (z_k^{int} - \mathbf{J}_k \hat{\mathbf{X}}_k) \\ &= \delta \mathbf{X}_{k,k-1} - \mathbf{K}_k \mathbf{J}_k \hat{\mathbf{X}} + \mathbf{K}_k \mathbf{J}_k \mathbf{X}_k + \mathbf{K}_k e_k^{int} \\ &= (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{J}_k) \delta \mathbf{X}_{k,k-1} + \mathbf{K}_k e_k^{int} \end{aligned} \quad (4-11)$$

估计误差的方差可以表示为：

$$\mathbf{P}_{k,k} = E\{\delta \mathbf{X}_{k,k} \delta \mathbf{X}_{k,k}^T\} \quad (4-12)$$

其中上标(+)表示后验状态估计。在此基础上，最优的增益矩阵 \mathbf{K}_k 的应该使得 $tr(\mathbf{P}_k)$ 尽可能小。将式(4-11)代入(4-12)中得：

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{k,k} &= (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{J}_k) \mathbf{P}_{k,k-1} (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{J}_k)^T + (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{J}_k) E\{\delta \mathbf{X}_{k,k-1} e_k^{int T}\} \mathbf{K}_k^T \\ &\quad + \mathbf{K}_k E\{e_k^{int} \delta \mathbf{X}_{k,k-1}^T\} (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{J}_k)^T + \mathbf{K}_k E\{e_k^{int} e_k^{int T}\} \mathbf{K}_k^T \end{aligned} \quad (4-13)$$

其中

$$\left\{ \begin{array}{l} E\{\delta \mathbf{X}_{k,k} e_k^{int T}\} = \mathbf{P}_{k,k-1} \mathbf{J}_k^T - \mathbf{M}^T \mathbf{J}_s^{*T} \\ E\{e_k^{int} e_k^{int T}\} = r_k + \mathbf{J}_k \mathbf{P}_{k,k-1} \mathbf{J}_k^T + \mathbf{J}_s^* \mathbf{P}_{s,s}^* \mathbf{J}_s^{*T} - \mathbf{J}_s^* \mathbf{M} \mathbf{J}_k^T - \mathbf{J}_k \mathbf{M}^T \mathbf{J}_s^{*T} \\ \mathbf{M} = E\{\delta \mathbf{X}_{s,s} \delta \mathbf{X}_{k,k-1}^T\} \end{array} \right. \quad (4-14)$$

将上式代入(4-13)，移项整理不难获得：

$$\mathbf{P}_{k,k} = \mathbf{P}_{k,k-1} - \mathbf{M}^T \mathbf{J}_s^{*T} \mathbf{K}_k^T - \mathbf{K}_k \mathbf{J}_s^* \mathbf{M} + \mathbf{K}_k \mathbf{J}_s^* \mathbf{P}_{s,s}^* \mathbf{J}_s^{*T} \mathbf{K}_k^T + \mathbf{K}_k r_k \mathbf{K}_k^T \quad (4-15)$$

我们已经得到了 $\mathbf{P}_{k,k}$ 与 \mathbf{K}_k 的函数关系，则增益矩阵的选取就变成了一个对 $tr(\mathbf{P}_k)$ 求极值的问题， $tr(\mathbf{P}_{k,k})$ 应取得最小值当满足：

$$\frac{\delta tr\{\mathbf{P}_{k,k}\}}{\delta \mathbf{K}_k} = 0 \quad (4-16)$$

对(4-15)求微分并联合(4-16)可以解得：

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{M} \mathbf{J}_s^{*T} \left[\mathbf{J}_s^* \mathbf{P}_{s,s}^* \mathbf{J}_s^{*T} + r_k \right]^{-1} \quad (4-17)$$

得到最优的增益矩阵，我们就可以进行系统状态的量测更新，将上式代入(4-15)

可以得到系统状态方差矩阵的更新公式:

$$\mathbf{P}_k = \mathbf{P}_{k,k-1} - \mathbf{K}_k \mathbf{J}_s^* \mathbf{M}^T \quad (4-18)$$

这时, 要完成时滞的量测更新, 只剩 t_s 和 t_k 时刻系统误差状态的协方差 \mathbf{M} 需要解, 对于 t_s 到 t_k 之间的系统状态误差传递可以由下式描述:

$$\delta \mathbf{X}_{k,k-1} = \prod_{i=0}^{k-s-1} [(\mathbf{I} - \mathbf{K}_{k-i} \mathbf{J}_{k-i}) \Phi_{k-i, k-i-1}] \delta \mathbf{X}_{s,s} + f_1(\mathbf{w}_{s+1} \dots \mathbf{w}_k) + f_2(\mathbf{v}_{s+1} \dots \mathbf{v}_{k-1}) \quad (4-19)$$

其中 f_1, f_2 分别是系统状态转移过程中过程噪声和量测噪声序列的函数, 协方差 \mathbf{M} 可通过下式求得:

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= E\{\delta \mathbf{X}_{s,s} \delta \mathbf{X}_{k,k-1}^T\} \\ &= \mathbf{P}_{s,s} \prod_{i=0}^{k-s-1} \Phi_{s+i+1, s+i}^T (\mathbf{I} - \mathbf{K}_{s+i+1} \mathbf{J}_{s+i+1})^T \\ &= \mathbf{P}_{s,s} \mathbf{M}^{*T} \end{aligned} \quad (4-20)$$

代回(4-18)可以得到时滞量测的系统状态方差更新公式:

$$\mathbf{P}_k = \mathbf{P}_{k,k-1} - \mathbf{K}_k \mathbf{J}_s^* \mathbf{P}_{s,s} \mathbf{M}^{*T} \quad (4-21)$$

其中

$$\mathbf{M}^* = \prod_{i=0}^{k-s-1} [(\mathbf{I} - \mathbf{K}_{k-i} \mathbf{J}_{k-i}) \Phi_{k-i, k-i-1}] \quad (4-22)$$

需要注意的是, 这种通过量测方程外推的时滞量测处理方法理论上不一定最优。原因是如果量测更新在 t_s 时刻进行, 系统矩阵会受到影响, 并且之后所有时刻的增益矩阵也会产生相应的变化, 但是(4-22)中用到的增益矩阵并不会反映出这种变化。所以如果延迟的时间内没有其他的量测发生, 这种方法就是理论最优的, 换句话说这种方法只能处理延迟量测, 而对于乱序的量测只能得到理论上的次优估计。

结合之前已经给出的双脚系统模型, 零速量测模型以及启发式的等式距离约束, 我们可以得到基于扩展卡尔曼滤波的双系统等式约束算法。算法的实现并不复杂, 但对于时序有严格要求, 算法对应的伪代码见下页。显然在时滞量测的处理中, 需要存储当前步态周期内的系统状态和系统矩阵, 本文中定义连续 20 个历元判定静止 (伪代码中用变量 cz 表示) 作为一个步态周期开始的标志, 同时也是上一个步态周期的结束标志。算法的运行流程如下:

- 1) 首先利用惯导算法更新系统状态。
- 2) 计算两个系统各自的零速检测统计量, 如果对判定为静止的系统施加零速修正, 两个系统独立运行直到一个步态周期的结束。

基于等式约束的双系统融合算法伪代码实现

1: $z_c = 0, k = 1, cz = 0, steps = 0, stancce = 0$	18: if $steps < 3$
2: $\hat{\mathbf{X}}_k \leftarrow \{Initial\ system\ state\}$	19: $z_c += \hat{z}_c$
3: $\mathbf{P}_k \leftarrow \{Initial\ covariance\}$	20: $z_c = z_c / 3$
4: $\mathbf{Buf} \leftarrow \{System\ buffer\ of\ \mathbf{F}, \mathbf{J}, \mathbf{K}, \hat{\mathbf{X}}, \mathbf{P}\}$	21: elseif $ \hat{z}_c - z_c < 0.035$
5: loop 1	22: loop 2 ($i \leftarrow from\ k\ to\ s$)
6: $k = k + 1$	23: $(\mathbf{F}_i, \mathbf{K}_i, \mathbf{J}_i) = \{\mathbf{Buf}(i)\}$
7: $\hat{\mathbf{X}}_k \leftarrow \{INS\ Mechanization\ (\mathbf{X}_k, \mathbf{f}, \boldsymbol{\omega})\}$	24: $\mathbf{M}^* = \mathbf{M}^*(\mathbf{I} - \mathbf{K}_i \mathbf{J}_i) \mathbf{F}_i$
8: $\mathbf{P}_k = \mathbf{F}_k \mathbf{P}_k \mathbf{F}_k^T + \mathbf{G}_k \mathbf{Q} \mathbf{G}_k^T$	25: end loop 2
9: if static	26: $(\mathbf{P}_s, \mathbf{J}_s^*) = \{\mathbf{Buf}(s)\}$
10: $[\hat{\mathbf{X}}_k, \mathbf{P}_k] \leftarrow \{ZUPT(\hat{\mathbf{X}}_k, \mathbf{P}_k)\}$	27: $\mathbf{K}_k = \mathbf{M}^* \mathbf{P}_s \mathbf{J}_s^{*T} [\mathbf{J}_s^* \mathbf{P}_s \mathbf{J}_s^{*T} + r]^{-1}$
11: $cz = cz + 1$	28: $\hat{\mathbf{X}}_k = \hat{\mathbf{X}}_k - \mathbf{K}_k (\hat{z}_c - z_c)$
12: else	29: $\mathbf{P}_k = \mathbf{P}_k - \mathbf{K}_k \mathbf{J}_s^* \mathbf{P}_s \mathbf{M}^{*T}$
13: $cz = 0, stancce = 0$	30: end
14: end if	31: $\mathbf{Buf} \leftarrow \{Reset\ system\ buffer\}$
15: if $cz >= 20 \& stancce == 0$	32: end
16: $steps = steps + 1, stancce = 1$	33: $\mathbf{Buf} \leftarrow \{Update\ system\ buffer(\mathbf{F}_k, \mathbf{J}_k, \mathbf{K}_k, \hat{\mathbf{X}}_k)\}$
17: $[\hat{z}_c, s] \leftarrow \{Minimum\ distance(\mathbf{Buf})\}$	34: end loop 1

3) 当检测到一个步态周期的结束, 遍历这个周期内所有的系统状态, 记录双系统距离最近的历元。在进行等式距离约束之前, 首先检查约束信息的可用性。当约束距离和系统估计的双脚距离差异大于 3cm(光学系统给出的最短距离序列标准差的 3 倍)认为不可用, 这样我们可以剔除一些由异常步态引起的粗差; 反之, 满足可用条件时, 则利用存储下来的从最短距离时刻到当前时刻内的状态转移矩阵, 量测方程系数矩阵以及卡尔曼增益将时滞量测外推到当前时刻, 然后基于标准的卡尔曼滤波算法进行量测更新。由于不同的个体之间双脚最短距离可能存在明显差异, 因此我们利用最先开始的几步计算得到的最短距离均值作为随后的常值约束。

4) 等式约束完成后即开始存储下一个步态周期的系统状态和系统矩阵, 回到第一步开始下一个算法周期。

4.3 算法性能测试与验证

为了测试本文提出算法的有效性, 我们设计了两种典型的实场测试。我们仍然将武汉易得路科技有限公司的 YDL 行人导航模块安装在脚尖进行数据采集, 传感器采样频率为 200Hz。这里首先定义两种典型测试轨迹: 100m 直线和矩形回环轨迹。用基于零速修正的单脚算法, 不等式约束的双脚算法 (Skog I et al, 2012) 以及本文提出的等式约束双脚算法分别对采集到的数据进行处理。由于行人步长一般在 1~1.2m 之间, 所以我们将不等式约束算法的双脚距离上限设置为 1.2m。

在第一个测试中，一个成年男性（1.75m）左右脚各安装一个导航模块，以正常的速度沿一条 100m 直线跑道行走，重复 10 次得到 10 组数据。我们在测试的起点和距起点 5m 处设置参考点来进行航向角的初始化。一般来说轨迹终点的位置误差最大，因为测试者保持直线行走，没有产生因折返轨迹导致的系统误差抵消。所以这里我们可以用终点位置误差来评估直线测试中的系统精度。图 4.4 给出了三种不同算法得到的位置估计结果，蓝色线表示左脚轨迹，橘黄色线代表右脚轨迹；红色，绿色，蓝色以及黑色的矩形点分别表示左脚和右脚的起点和终点。可以看出，无约束双系统估计得到的轨迹结果存在明显的对称性误差。如表 4.2 中所示，不等式约束双系统算法得到的系统精度约为行走里程的 1%，这和文献（Skog I et al, 2012）中得到的结果类似。本文提出的双系统启发式等式约束

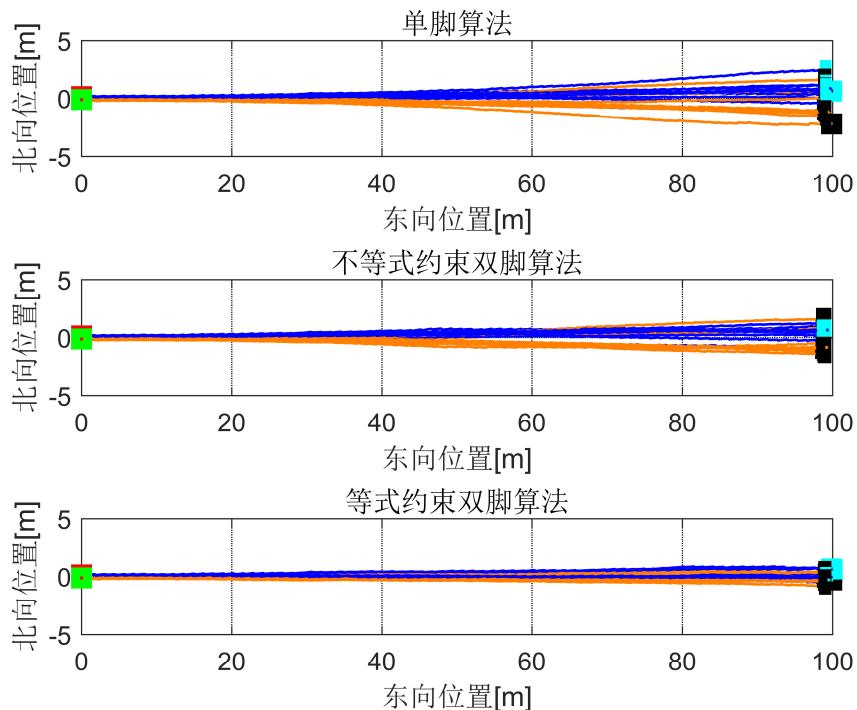


图 4.4 100 米直线轨迹测试结果

表 4.2 100 米直线轨迹测试误差统计结果

处理算法	误差类型	左脚误差(m)	右脚误差(m)	误差里程比(%) 左脚/右脚
无约束算法	RMS	1.03	1.29	1.03/1.29
	Max	2.25	2.11	2.25/2.11
不等式约束	RMS	0.94	1.25	0.94/1.25
	Max	1.92	1.37	1.93/1.37
等式约束	RMS	0.40	0.53	0.40/0.53
	Max	0.57	0.74	0.57/0.74

算法表现明显优于其他两种算法。在 100 米直线测试中，定位精度相比不等式约

束算法提高了 1 倍，约行走里程的 0.5%。从表 4.2 中不难发现，在施加等式约束之后，最大位置估计误差和均方根误差均有明显减小。另外从图 4.5 中的误差椭圆中也能看出等式约束算法带来的精度提升。

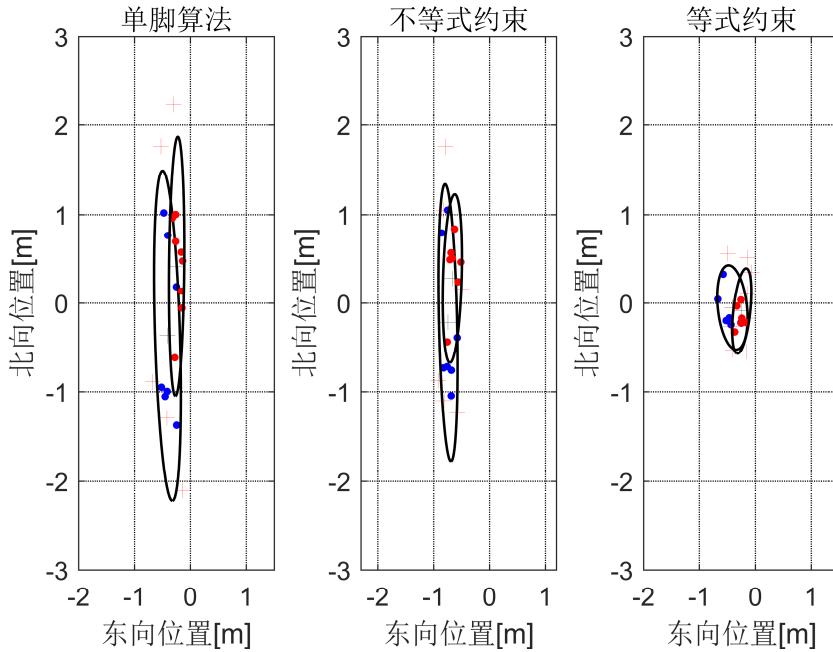


图 4.5 100 米直线轨迹测试误差椭圆

在第二个测试中，实验者配备测试一中所使用的两个模块，从起点开始绕一个矩形轨迹行走 10 圈，然后回到起点位置形成闭环，利用起终点闭合差作为系统精度评估标准。矩形轨迹的周长约 80m，整个测试持续约 10 分钟，里程总长约 800m。不同算法的轨迹估计结果见下页图 4.6，相比无约束的单脚算法，双系统不等式约束算法的定位精度有了明显的提升，而本文提出的等式约束算法比不等式约束算法表现更好。表 4.3 列出了具体数值结果，左右脚单系统最大闭合差分别达到了 6.8m 和 4.18m；在加入不等式约束之后，最大闭合差分别减小至 1.76m 和 1.28m；而加入等式约束后，精度有了进一步提升，最大闭合差分别减小至 1.26m 和 1.30m。

需要注意的是，对于闭环轨迹来说，由于误差抵消现象的存在，闭合差和误差里程比不是一个很好的评价指标。从表 4.3 中我们可以看出单系统误差里程比仍保持在行走总里程的 1% 以内，但是我们能够观察到轨迹中间存在明显的误差发散现象。这时，重复轨迹的重合度是一个更好的系统精度评价指标。另外，等

表 4.3 矩形轨迹测试误差统计结果

处理算法	误差类型	左脚误差(m)	右脚误差(m)	误差里程比(%) 左脚/右脚
无约束算法	闭合差	6.80	4.18	0.85/0.52
不等式约束	闭合差	1.76	1.28	0.22/0.16
等式约束	闭合差	1.26	1.30	0.16/0.16

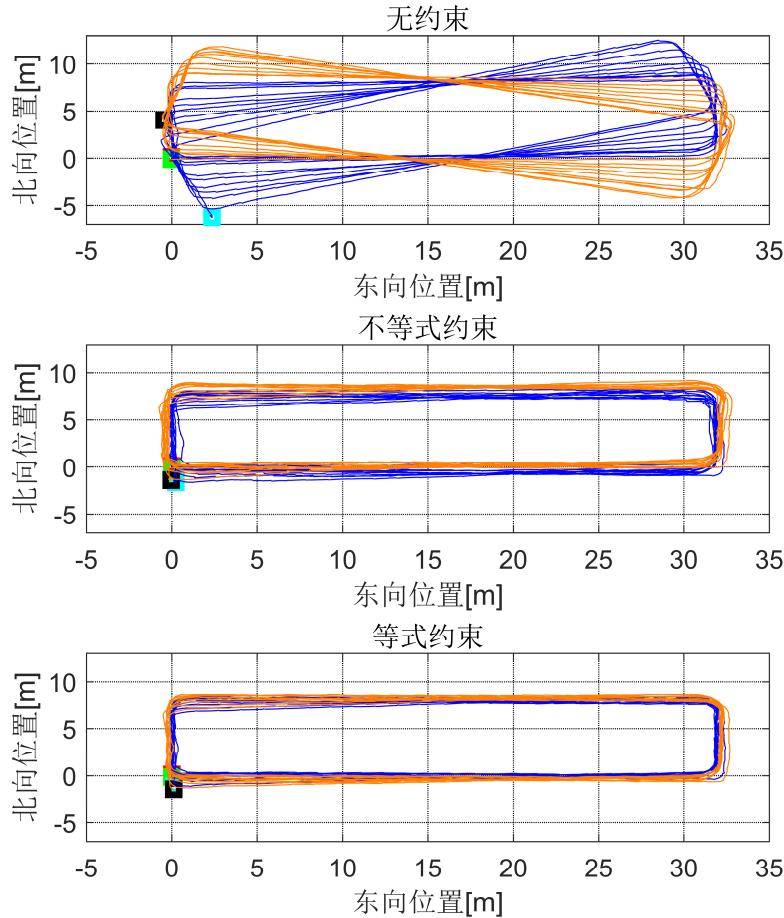


图 4.6 矩形轨迹测试结果

式约束算法的结果中，不难发现左脚模块估计的位置总是在右脚的左边，这看上去是一种很自然的现象，但另一方面也说明等式约束算法能够充分利用人体步态特性，提升最终的导航定位精度。

4.4 小结

本章中提出了一种不依赖额外测距设备的双系统等式约束融合算法，首先，从行人步态模式中总结出一个普遍规律，即人在行走过程中，不同脚步周期内两脚之间的最短距离基本不变；然后利用高精度光学动作捕捉系统分析了真实的行人步态，使用实测数据证明了最短距离约束的可用性。然后，给出了算法相关的数学模型，并对实时算法实施过程中的量测延时处理方法进行了推导，得到了一个计算复杂度较低的实时算法实现。最后，利用行人行走状态的实测数据验证了该方法的有效性，并且其性能较其他已有的典型双系统约束算法有明显提高。

5. 结论和展望

5.1 本文工作总结

目前，室内外无缝的行人导航定位仍然是一个难题，也是当下的一个研究热点。一般认为，精准、稳健的室内外无缝定位系统仅仅借助单一技术手段是无法实现的，而应该是充分利用多种定位技术间互补特性的系统集成。惯性导航不受外界干扰，不管是在室内环境或是室外环境，导航定位表现基本一致。同时，丰富的导航信息（位置，速度，姿态）和较好的实时性（数据率达到上百甚至上千赫兹）使得惯导能够更容易与其他定位手段进行组合导航定位。因此，惯性导航通常用作为多传感器融合的核心，并且发展为一个精准稳定的行人导航系统中不可或缺的部分。本文对脚绑惯性传感器的行人导航系统进行了研究，主要工作总结如下：

1. 考虑到 MEMS 传感器向高精度的发展趋势，除了针对低成本惯性传感器的简化算法，本文还给出了脚绑系统惯性导航算法的高精度实现，方便日后在高精度中应用中的工程实现和系统数字仿真。
2. 设计了一种基于实测数据的脚绑惯性传感器数据仿真方法，详述了仿真数据的生产流程以及相应的数据处理方法。参考真值生成阶段，本文在脚绑惯性传感器基本算法的基础上，利用最优平滑算法消除了仿真数据中与实际不符的毛刺，从而使生成的仿真数据很好地保留了脚部运动的细节信息，与实测数据有很高的符合度。惯性数据反演阶段，本文使用抗发散的准二子样的速度增量和角增量反演算法，很好地避免了数值计算误差的累积。另外，本文使用上述算法仿真生成了脚绑场景下的各等级典型惯性传感器数据，并评价了基于各等级惯性器件的脚绑系统的定位性能，用以作为系统设计和传感器选型的重要参考。同时，本文基于光学动作捕捉系统仿真和分析了行人脚部静态特性，量化了零速度量测误差脚绑行人惯导系统精度造成的影响，为各等级系统误差源分析提供了参考。
3. 提出了一种无需外部测距设备辅助的等式距离约束算法。通过研究行人步态模式，我们发现一个脚步周期内行人两脚之间的最短距离基本不变。基于上述基本事实，本文设计了一种启发式等式约束算法，并给出了在实时系统中的伪代码实现。相比不等式约束算法，等式约束不仅能消除双脚对称性的系统误差，而且能够为整个系统提供更加稳定和持续的辅助信息。两种典型轨迹测试表明本文中提出的等式约束算法在性能上明显优于已有的单脚算法和不等式约束算法。

5.1 后续工作展望

基于足绑惯性传感器的行人导航系统不需要提前布设任何基础设施，不受外界环境影响，在单兵，武警等专业应用领域有广泛的应用前景。本文对相关算法和系统仿真进行了一定的研究，但因时间有限，部分工作还有待进一步完善和充实，主要体现在如下几个方面：

1. 目前要想获得逼真的无误差的脚绑惯性传感器数据仍然需要实测数据，而我们希望能够实现无需实测即能按用户定义的轨迹生成同样逼真的仿真数据。目前我们已经在日常的实测中积累了大量的行人脚绑惯性传感器数据，达到上述目标的一种方法就是以脚步或者一段基础轨迹（例如直线，直角转弯）为单位建立数据库，通过这些轨迹段或脚步的拼接形成用户定义的轨迹形状，但是在此过程中可能需要解决不连续的数据拼接和角速率和加速度的协调性等问题。
2. 由于在室外广阔环境中没有光学动作捕捉系统这样的足够精确的参考系统，因此针对行走过程中脚部的静态特性的研究仍然只能在室内小范围实验场中进行。另外虽然已经量化并分析了零速量测的系统误差，但是仍然没有较好的办法来解决行走过程中出现的零速量测质量较差的问题。一种方法是对于惯性传感器在脚部的具体安装位置的静态特性进行研究。我们希望能够选择能提供最好的量测信息的安装部位，或者通过杆臂补偿间接得到静态特性最好的安装部位的量测信息，这对于高精度系统的性能提升至关重要。
3. 本文中将脚绑惯导系统的主要误差归结为由器件误差和零速量测误差，实际上惯导算法也会带来一定的误差，尤其脚部动态环境特性与前人研究较多的高频振动环境有明显差异，因此针对脚部运动环境优化的惯导更新算法也有助于进一步提高系统精度。
4. 对于文中提出的等式约束双系统融合算法，显示目前只针对行人的一般步态，一些诸如横移，上下楼梯的常见步态并没有考虑在内。在实际应用中，不等式和等式约束双系统算法的结合应当能够提供更加稳定的性能。
5. 惯导对于行人导航系统来说至关重要，但是仍存在其局限性，在长时间的导航任务中仍然需要其他信息源的辅助。相机，激光雷达等传感器能够在室内特征丰富的场景中提供精度较高的辅助信息。尤其相机拍摄的图像中含有丰富的语义信息，某些信息能够作为地标为脚绑惯导系统提供关键性的辅助。因此在后续工作中应当对脚绑系统与其他传感器的信息融合进行针对性的研究。

参考文献

- 帅平, 曲广吉, 现代卫星导航系统技术的研究进展[J]. 中国空间科学技术, 2007.
- Husen M N, Lee S. Indoor human localization with orientation using WiFi fingerprinting[C]//International Conference on Ubiquitous Information Management & Communication ACM, 2014. Conference on Ubiquitous Information Management & Communication ACM, 2014. 2014:1–6.
- Subbu K S P. Indoor localization using magnetic fields[C]//International Conference on Ubiquitous Information Management & Communication. ACM, 2014. Communication. 2011:1–140.
- Hemin Zhang, Weizheng Yuan, Qiang Shen. A Handheld Inertial Pedestrian Navigation System With Accurate Step Modes and Device Poses Recognition[J]. IEEE Sensors Journal, 2014, 15(3):1421–1429.
- Wang B, Liu X, Yu B. Pedestrian dead reckoning based on motion mode recognition using a smartphone[J]. Sensors (Switzerland), 2018, 18(6).
- Foxlin E. Pedestrian Tracking with Shoe-Mounted Inertial Sensors[J]. System, 2005(December):38–46.
- Feliz Alonso R, Zalama Casanova E, Gómez García Bermejo J. Pedestrian tracking using inertial sensors[J]. Journal of Physical Agents (JoPha), 2016, 3(1):35–43.
- Godha S, Lachapelle G. Foot mounted inertial system for pedestrian navigation[J]. Measurement Science and Technology, 2008, 19(7).
- Ojeda L, Borenstein J. Non-GPS navigation for security personnel and first responders[J]. Journal of Navigation, 2007, 60(3):391–407.
- Skog I, Peter H, Rantakokko J. Zero-velocity detection in pedestrian navigation systems — an algorithm evaluation[J]. Biomedical Engineering, 2010, 57(11):2657–2666.
- Callmer J, Tornqvist D, Gustafsson F. Probabilistic stand still detection using foot mounted IMU[J]. Information Fusion 2010 13th Conference on, 2010:1–7.
- Park S K, Suh Y S. A zero velocity detection algorithm using inertial sensors for pedestrian navigation systems[J]. Sensors (Switzerland), 2010, 10(10):9163–9178.
- Ren M, Pan K, Liu Y. A novel pedestrian navigation algorithm for a foot-mounted inertial-sensor-based system[J]. Sensors (Switzerland), 2016, 16(1):9–11.
- Wagstaff B, Kelly J. LSTM-Based Zero-Velocity Detection for Robust Inertial Navigation[J]. 2018(September):24–27.
- Rantakokko J, Nygård J, Stromback. Integration of GNSS-receivers with dual foot-mounted INS in urban and indoor environments[J]. Proceedings of the IEEE/ION Position, Location and Navigation Symposium, PLANS 2016, 2016:589–598.
- Le Scornec J, Ortiz M, Renaudin V. Foot-mounted pedestrian navigation reference with tightly coupled GNSS carrier phases, inertial and magnetic data[J]. 2017 International Conference on Indoor Positioning and Indoor Navigation, IPIN 2017, 2017, 2017–Janua(September):1–8.
- Xu Y, Chen X, Cheng J. Improving tightly-coupled model for indoor pedestrian navigation using foot-mounted IMU and UWB measurements[J]. Conference Record - IEEE Instrumentation and Measurement Technology Conference, IEEE,

- 2016, 2016–July(3):1–5.
- Pierce D. Incorporation of a Foot-Mounted IMU for Multi-Sensor Pedestrian Navigation[J]. 2016.
- Rantakokko J, Strömbäck P, Emilsson E. Soldier positioning in GNSS-denied operations[J]. Proc. of Sensors and Electronics Technology Panel Symposium (SET-168) on Navigation Sensors and Systems in GNSS Denied Environments, 2012:1–12.
- Pham D D, Suh Y S. Pedestrian navigation using foot-mounted inertial sensor and LIDAR[J]. Sensors (Switzerland), 2016, 16(1).
- Borenstein J, Ojeda L. Heuristic Reduction of Gyro Drift in IMU-Based Personnel Tracking Systems[J]. Journal of Navigation, 2010, 63(4): 591–606.
- Abdulrahim K, Hide C, Moore T. Using constraints for shoe mounted indoor pedestrian navigation[J]. Journal of Navigation, 2012, 65(1): 15–28.
- Prateek G V, Girisha R, Hari K V S. Data fusion of dual foot-mounted INS to reduce the systematic heading drift[J]. Proceedings - International Conference on Intelligent Systems, Modelling and Simulation, ISMS, 2013:208–213.
- Shi W, Wang Y, Wu Y. Dual MIMU pedestrian navigation by inequality constraint kalman filtering[J]. Sensors (Switzerland), 2017, 17(2):1–8.
- Skog I, Nilsson J O, Zachariah D. Fusing the information from two navigation systems using an upper bound on their maximum spatial separation[J]. 2012 International Conference on Indoor Positioning and Indoor Navigation, IPIN 2012 - Conference Proceedings, 2012(November): 13–15.
- Laverne M, George M, Lord D. Experimental Validation of Foot to Foot Range Measurements in Pedestrian Tracking[J]. Ion Gnss 2011, 2011:1386–1393.
- Brand T J, Phillips R E. Foot-to-foot range measurement as an aid to personal navigation[J]. ION 59th Annual Meeting, 2003:113–121.
- Angermann M, Robertson P, Kemptner T. A high precision reference data set for pedestrian navigation using foot-mounted inertial sensors[J]. 2010 International Conference on Indoor Positioning and Indoor Navigation, IPIN 2010 - Conference Proceedings, 2010(September):15–17.
- Francisco J, Zampella A R J. Simulation of Foot-Mounted IMU Signals for the Evaluation of PDR Algorithm[J]. International Symposium on Power Electronics Electrical Drives Automation and Motion, 2006: 930–936.
- Wang Y, Chernyshoff A, Shkel A M. Error Analysis of ZUPT-Aided Pedestrian Inertial Navigation[J]. 2018 International Conference on Indoor Positioning and Indoor Navigation (IPIN), 2018(September): 24–27.
- 张天光, 王秀萍. 捷联惯性导航技术[M]. 国防工业出版社, 2006.
- Shin E H. Accuracy Improvement of Low Cost INS / GPS for Land Applications by Eun-Hwan Shin[D]. Department of Geomatics Engineering, University of Calgary, 2001 Master(20156).
- 严恭敏, 翁浚. 捷联惯导算法与组合导航原理 讲义[M]. 2016.
- Bortz J E. A New Mathematical Formulation for Strapdown Inertial Navigation[J]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 1971, AES-7(1):61–66.

- Shin E H. Estimation Techniques for Low-Cost Inertial Navigation[D]. Department of Geomatics Engineering, University of Calgary, 2005, Ph.D(2019).
- Nilsson J O, Gupta A K, Handel P. Foot-mounted inertial navigation made easy[J]. IPIN 2014 - 2014 International Conference on Indoor Positioning and Indoor Navigation, 2014(October): 24–29.
- 高钟毓, 王进, 董景新. 惯性测量系统零速修正的几种估计方法[J]. 中国惯性技术学报, 1995:24–29.
- Peter S M. Stochastic Models, Estimation, and Control[J]. 1982, 2.
- 王强. 基于惯性导航机械编排的组合导航仿真技术研究[D]. 武汉大学, 2016.
- 严恭敏, 王金岭. 基于实测轨迹的高精度捷联惯导模拟器[J]. 导航定位学报, 2008, 39(5): 561–563.
- Nilsson J, Skog I, Hänel P. A note on the limitations of ZUPTs and the implications on sensor error modeling[J]. Proceeding of 2012 International Conference on Indoor Navigation, 2012(November):13–15.
- Peruzzi A, Della Croce U, Cereatti A. Estimation of stride length in level walking using an inertial measurement unit attached to the foot: A validation of the zero velocity assumption during stance[J]. Journal of Biomechanics, Elsevier, 2011, 44(10):1991–1994.
- 刘杰. 附等式约束的卡尔曼滤波算法研究与应用[D]. 中南大学, 2011.
- Yang C, Blasch E. Kalman filtering with nonlinear state constraints[J]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 2009, 45(1):70–84.
- Julier S J, Laviolar J J. On Kalman filtering with nonlinear equality constraints[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2007, 55(6 II):2774–2784.
- Tahk M, Speyer J L. Target Tracking Problems Subject to Kinematic Constraints[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 1990, 35(3):324–326.
- Larsen T D, Andersen N A, Ravn O. Incorporation of time delayed measurements in a discrete-time Kalman filter[J]. Proceedings of the 37th IEEE Conference on Decision and Control, 1999, 4(May 2014):3972–3977.

攻读硕士学位期间发表的论文和取得的科研成果

论文：

Y. Li, et al. "Fusing the Data of Two Foot-Mounted INS Based on a Heuristic Equality Constraint." IEEE UPINLBS, 2018 (普适定位，室内导航与基于位置服务国际会议). (EI)

X. Niu, Y. Li. "Data Fusion of Dual Foot-Mounted IMU for Pedestrian Navigation." IEEE Sensors Journal, 2019(Early Access). (SCI)

奖项：

IPIN-2018 国际室内定位比赛专业应用组冠军 (Foot-Mounted IMU Based Positioning, Track 4), 法国, 南特

致谢

转眼之间，三年已过，我的硕士研究生旅程也走到了终点。三年之中，有遗憾，但更多的是收获，有失落，但更多的是快乐。在硕士论文完结之际，我要向很多人表示由衷的感谢。

首先要感谢我的导师牛小骥老师，牛老师是我来到武大的原因。三年以来，牛老师在学习，科研和生活中都给了我很大的帮助。牛老师治学严谨，对学生毫无保留，尽管知识渊博，但他仍虚心好问，这样的品质给我留下了深刻的印象，也值得我去学习。无法忘记多少次牛老师因为与我们交流学术而忘了吃饭，为我们修改论文而工作到深夜。他是我日后学习、工作和生活中的好榜样，这里向牛老师表示深深的谢意。

其次要感谢组内的其他老师和同学们，感谢旷俭师兄，感谢他在三年里给予我的悉心指导，他是除牛老师外在学习和科研上对我帮助最大的人。感谢李青丽师姐，感谢她对我本科毕设的指导，感谢她在科研上带我入门。感谢张鹏师兄，感谢他为我提供了良好的科研平台，以及在论文思路上的指引和写作中给我的帮助。感谢李由师兄、王强师兄、毛大智师兄、张全师兄、陈起金师兄、黄夙寒师兄、刘韬师兄、蒋郡祥师兄、李团师兄、束远明师兄和金荣河师兄在学习，实验和生活中给我的帮助。感谢同门的陈新耿、程风、周禹昆、吴佳豪、祁发瑞、李卓、陈映秋，很荣幸能和你们成为朋友，在三年之中并肩作战，最后一同顺利毕业。感谢闫伟师弟，郭若南师弟、唐海亮师弟、彭益堂师弟、房博乐师弟、胡远迁师弟、吴宜斌师弟、杜俊伟师弟、张乐翔师弟、左延玉师妹、樊静师妹、葛雯斐师妹，很高兴有机会和你们一起学习。相信在你们的努力下，我们 GNSS/INS 团队一定能越来越大，越来越强。

感谢 410 宿舍苟利国家生死以团队的其他三位成员韩震，罗亚荣，谭俊雄，无法忘记无数次与你们谈天论地，从国家大事到学习科研，再到生活娱乐。我始终觉得我们是凝聚力最强的宿舍，也祝两位博士早日渡劫成功。感谢我的好友杨超，七年以来，从本科到硕士，甚至差点成为同事，时间为我俩的友情作了有力的见证，祝他博士征程一帆风顺。

最后要感谢我的家人，感谢爸妈和我的妹妹对我的支持，你们是我不断奋斗的主要动力。衷心地祝福所有帮助过我的老师，同学，家人和朋友，祝你们生活快乐，事事顺心。